

CAPÍTULO 4

Resuelve ecuaciones

Matemáticas en la vida diaria

Programación La programación matemática es una herramienta de amplia utilidad en una variedad de campos. La mayoría de los conocimientos matemáticos que hemos estudiado fueron descubiertos hace varios siglos. Sin embargo, la programación matemática apareció a finales de la década de 1940, después de la Segunda Guerra Mundial.

Los problemas que se resuelven con programación matemática también se conocen como problemas de optimización, porque están relacionados con la búsqueda de una solución óptima; es decir, con la búsqueda de la solución que permita obtener el valor máximo o mínimo, para variables como la ganancia, el costo o el tiempo. Estos problemas a menudo incluyen varias ecuaciones y desigualdades con muchas variables. Las compañías petroleras usan este tipo de programación para determinar la mejor manera de mezclar los componentes del petróleo y obtener gasolina. Esta técnica también se usa para calcular la cantidad mínima de comida que requieren los astronautas, de modo que reciban una nutrición apropiada durante un viaje en el transbordador espacial, debido al espacio limitado dentro del transbordador.

Piensa al respecto Escribe algunas de las variables que una compañía fabricante debe considerar para maximizar sus ganancias.



Carta a la familia

Estimados alumno(a) y familiares:

El siguiente capítulo que estudiaremos, explica cómo resolver ecuaciones. Esta es una de las destrezas matemáticas más importantes y de uso más frecuente. Se aplica en ciencias sociales, física, química, biología y en la vida cotidiana. Resolver ecuaciones permite calcular cuántos galones de gasolina se requieren para recorrer 500 millas. Los científicos que envían un satélite al espacio, los economistas que efectúan pronósticos sobre la economía y el ciudadano común que está calculando el pago de sus impuestos tienen que resolver complicadas ecuaciones.

En años anteriores, aprendimos diversos métodos para resolver ecuaciones. En este capítulo, repasaremos y profundizaremos esos métodos y los usaremos para resolver desigualdades y sistemas de dos ecuaciones y dos variables. Aprenderemos también a usar una calculadora graficadora para obtener la solución aproximada de ecuaciones y sistemas de ecuaciones.

Las desigualdades son comunes en la vida cotidiana. Por ejemplo, si tienen \$5.00 y van a la tienda para comprar marcadores cuyo precio individual es \$1.95, y almohadillas para entintar sellos, cuyo precio individual es de \$0.95, la siguiente desigualdad

$$1.95m + 0.59p \leq 5.00$$

les indica las diferentes combinaciones del número de marcadores y almohadillas para entintar que podrán comprar. En este ejemplo, comprar 1 marcador y 5 almohadillas ó 2 marcadores y 2 almohadillas, satisfacen la desigualdad.

También aprenderemos a resolver sistemas de ecuaciones con dos variables. En estos casos, tendremos que hallar el par de valores que satisfaga a *ambas* ecuaciones. Por ejemplo:

Durante un juego de baloncesto, Corrine anotó un total de 23 puntos al encestar 10 veces. Algunos de sus tiros valieron dos puntos y otros valieron tres puntos. ¿Cuántos tiros de cada tipo encestró Corrine?

Para contestar esta pregunta, debemos resolver el siguiente sistema de ecuaciones, donde x representa el número de tiros de 2 puntos y y representa el número de tiros de 3 puntos:

$$x + y = 10 \quad y \quad 2x + 3y = 23$$

Vocabulario Aprenderemos varios términos nuevos a lo largo de este capítulo:

eliminación
desigualdad

sustitución
sistema de ecuaciones

¿Qué pueden hacer en el hogar?

Pídanle a su hijo(a) que les muestre algunas de las ecuaciones que está resolviendo, así como los métodos que está usando para resolverlas. Estimulen a su hijo(a) para que piense en cómo podría usar esta destreza fuera de la escuela.



Más sobre ecuaciones

La solución de problemas matemáticos con frecuencia significa escribir y resolver ecuaciones. Probablemente ya hayas visto varias estrategias para resolver ecuaciones.

Piensa & comenta

Describe algunas estrategias que podrías usar para resolver esta ecuación.

$$6\left(\frac{2(2x - 6)}{4}\right) = 12$$

He aquí tres métodos para resolver ecuaciones que probablemente ya has usado.

- *Conjetura, verifica y mejora:* Conjetura la solución, reemplaza tu conjetura en la ecuación, verifícala y usa el resultado para mejorar tu conjetura, si es necesario.
- *Vuelta atrás:* Empieza con el valor de salida y trabaja al revés para encontrar el valor de entrada.
- *Haz lo mismo en ambos lados:* Aplica la misma operación matemática en ambos lados de la ecuación, hasta que la solución sea fácil de ver.

En esta lección, vas a repasar dos de estos métodos: vuelta atrás y hacer lo mismo en ambos lados.

Investigación 1

Repasa los métodos para resolver ecuaciones

Supón que quieres resolver una ecuación que consta de una expresión algebraica en un lado y un número en el otro, como esta ecuación:

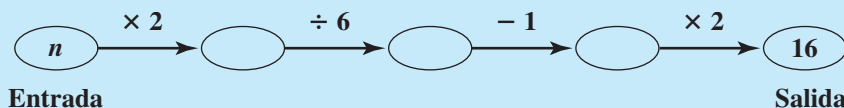
$$2\left(\frac{2n}{6} - 1\right) = 16$$

La técnica de vuelta atrás será probablemente un buen método de solución para este tipo de ecuaciones.

EJEMPLO

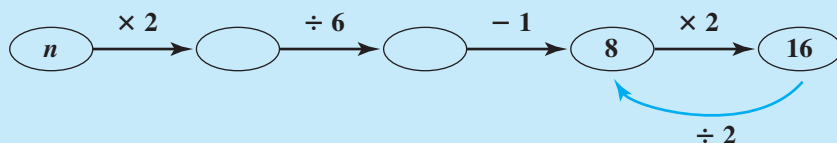
Resuelve $2\left(\frac{2n}{6} - 1\right) = 16$ usando vuelta atrás.

Piensa en n como la entrada y 16 como la salida. Haz un flujograma para mostrar las operaciones necesarias para llegar de la entrada a la salida.

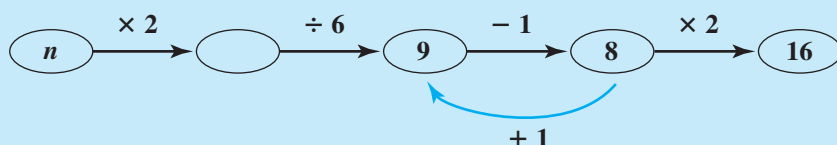


Este flujograma muestra que multiplicas la entrada por 2, divides el resultado entre 6, restas 1 y después multiplicas por 2. El valor de salida es 16. Para usar la vuelta atrás, empieza desde la salida y trabaja al revés, *deshaciendo* cada operación, hasta que encuentres la entrada.

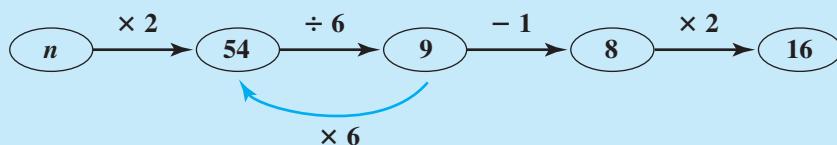
El valor en el cuarto óvalo se multiplica por 2 para obtener 16, de manera que este valor debe ser 8.



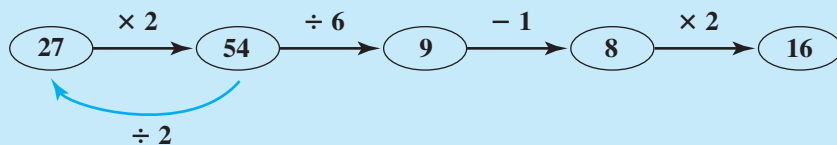
El número 1 se resta del valor en el tercer óvalo para obtener 8, de manera que este valor debe ser 9.



El valor en el segundo óvalo se divide entre 6 para obtener 9, de manera que este valor debe ser 54.



La entrada se multiplica por 2 para obtener 54, de manera que la entrada debe ser 27. Así que la solución de $2\left(\frac{2n}{6} - 1\right) = 16$ es 27.



Serie de problemas A

Resuelve cada ecuación usando vuelta atrás. Verifica cada solución reemplazándola en la ecuación original.

1. $3\left(\frac{n}{2} - 1\right) = 15$

2. $\frac{2(n+1)-3}{4} = 5$

3. $2\left(\frac{n}{4} - 3\right) + 1 = 5$

Para ecuaciones sencillas, podrías usar la vuelta atrás mentalmente. Es posible que piensas en resolver $\frac{n}{3} + 1 = 4$ de la siguiente manera:

Esta ecuación quiere decir “divide entre 3 y después suma 1”, lo cual da 4. Para usar la vuelta atrás, “resta 1” para pasar de 4 a 3 y después “multiplica por 3” para llegar a 9.

Resuelve cada ecuación mentalmente, si puedes. Si tienes problemas, usa lápiz y papel. Verifica cada solución reemplazándola en la ecuación.

4. $6(3m - 4) = 12$

5. $\frac{3m}{4} + 4 = 12$

6. $\frac{3(n+4)}{6} = 12$

Algunas ecuaciones no se pueden resolver directamente usando vuelta atrás.

Piensa & comenta

Héctor trata de resolver $3a + 4 = 2a + 7$ usando la técnica de vuelta atrás, pero no puede entender cómo hacer un flujograma. ¿Por qué crees que tiene problemas?

¿Cómo podrías resolver $3a + 4 = 2a + 7$?

Las ecuaciones que no se pueden resolver fácilmente usando la técnica de vuelta atrás con frecuencia pueden resolverse haciendo lo mismo en ambos lados.

EJEMPLO

Resuelve $3a + 4 = 2a + 7$ haciendo lo mismo en ambos lados.

$$3a + 4 = 2a + 7$$

$$a + 4 = 7$$

$$a = 3$$

después de restar $2a$ de ambos lados

después de restar 4 de ambos lados

Serie de problemas B

Resuelve cada ecuación haciendo lo mismo en ambos lados. Verifica tus soluciones.

1. $3a - 4 = 2a + 3$
2. $11b - 6 = 9 + 6b$
3. $7 - 5x = 12 - 3x$
4. $3y + 7 = 7 - 2y$

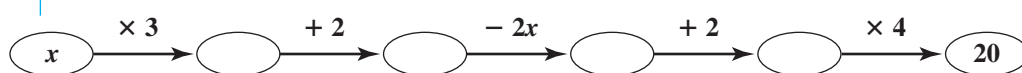
A veces, necesitas reducir una ecuación antes de poder resolverla.

Serie de problemas C

1. Dado que un lado de esta ecuación es un número, Tala pensó que podría resolverla usando la vuelta atrás.

$$4(3x + 2 - 2x + 2) = 20$$

- a. Tala dibujó un flujograma para esta ecuación pero no pudo deducir cómo usar la vuelta atrás para resolverla. ¿Por qué crees que tuvo problemas?



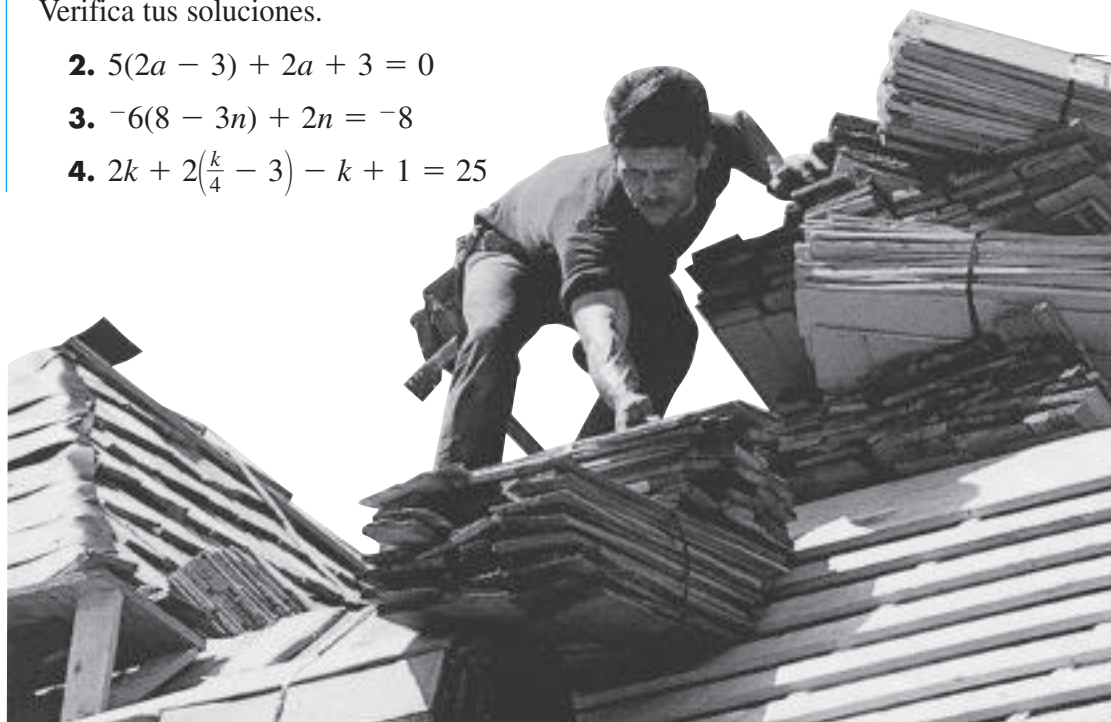
- b. Tala pensó que la ecuación podía resolverse más fácilmente si ella la reducía de manera que x apareciera sólo una vez. Reduce la ecuación y después resuélvela usando la vuelta atrás.

Reduce cada ecuación y resuélvela usando cualquier método que elijas. Verifica tus soluciones.

2. $5(2a - 3) + 2a + 3 = 0$
3. $-6(8 - 3n) + 2n = -8$
4. $2k + 2\left(\frac{k}{4} - 3\right) - k + 1 = 25$



Los constructores usan a menudo los flujogramas para organizar todos los pasos relacionados con un proyecto de construcción.





Serie de problemas **D**

Ahora trata de aplicar las técnicas para resolver ecuaciones en la solución de problemas.

1. Mikayla dice: —Estoy pensando en un número. Cuando le resto 3, multiplico el resultado por 8 y después lo divido entre 3 y me da 32. ¿Cuál es mi número?
2. Neva y Owen coleccionan figuras de acción. Owen tiene cinco veces más el total de figuras que tiene Neva. Owen también tiene 60 más que Neva. Escribe una ecuación para calcular el número de figuritas que Neva y Owen tienen cada uno.
3. La suma de cuatro números enteros consecutivos es 150.
 - a. Sea x el primer número. Escribe expresiones para representar los otros tres números.
 - b. Escribe y resuelve una ecuación para encontrar los cuatro números.
4. La suma de tres números *pares* consecutivos es 78.
 - a. Sea n el primer número par. Escribe expresiones para los dos siguientes números pares.
 - b. Escribe y resuelve una ecuación para encontrar los tres números.
5. Una distribuidora de videos tiene 800 copias de un nuevo video para distribuir las entre cuatro tiendas. Piensa darles a las dos primeras tiendas el mismo número de copias. La tercera tienda recibirá tres veces la cantidad de cualquiera de las primeras dos. La cuarta tienda recibirá 20 más que cualquiera de las primeras dos.
 - a. ¿Cuántas copias recibirá cada tienda?
 - b. El distribuidor tiene 700 copias de otro video que quiere distribuir usando la misma regla. ¿Cuántas copias crees que debería darle a cada tienda? Explica tu respuesta.

Comparte & resume

1. ¿Podrías resolver todos los problemas de vuelta atrás de la Serie de problemas A haciendo lo mismo en ambos lados?
2. Escribe una ecuación, semejante a las de la Serie de problemas A, que pueda resolverse con la vuelta atrás. Resuelve tu ecuación primero usando la vuelta atrás y después haciendo lo mismo en ambos lados, registra cada paso de tus soluciones. ¿Qué relaciones notaste entre los dos métodos?

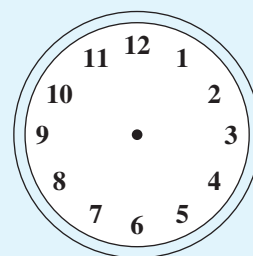


La aritmética y el álgebra con los que estás familiarizado implican el *sistema de números reales*. Este sistema incluye todos los números de la recta numérica y las operaciones matemáticas como la adición, sustracción, multiplicación y división.

En esta investigación, explorarás los sistemas numéricos llamados *sistemas horario*. Aunque los sistemas horario incluyen también la sustracción, multiplicación y división, trabajarás sólo con la adición.

Decir la hora

Nuestro método de decir la hora usa las horas del 1 al 12. Un sistema numérico que se basa en la forma en que decimos la hora puede llamarse *sistema horario de 12 horas*.



Supón que ahora son las 4 en punto.

1. Considera las horas en las siguientes 8 horas.
 - a. ¿Qué hora será en 2 horas? ¿En 4 horas? ¿En 7 horas?
 - b. ¿Cómo encontraste la respuesta a la Parte a?
2. Ahora considera las horas *más allá* de las 8 horas a partir de ahora.
 - a. ¿Qué hora será en 10 horas? ¿En 12 horas? ¿En 20 horas?
 - b. ¿Cómo encontraste la respuesta a la Parte a?
 - c. ¿Qué hora será en 21 horas? ¿En 35 horas?
3. Lydia dice que ella podría calcular la hora en h horas después de las 4 en punto al calcular $4 + h$ y restando 12 hasta que la respuesta esté entre 1 y 12.
 - a. Explica por qué funciona su método.
 - b. ¿Puedes encontrar un método más rápido para calcular la hora h horas después de las 4 en punto? Si es así, descríbelo. Después ilustra tu método y úsalo para calcular la hora 50 horas después de las 4 en punto.
4. Tus respuestas para las Preguntas 1 y 2 de la Parte a deberían haber estado entre 1 y 12.
 - a. Explica por qué.
 - b. El sistema horario de 12 horas incluye sólo enteros. ¿Cuántos números tiene este sistema?



**Datos
de interés**

Los primeros relojes, usados por los antiguos egipcios, eran relojes de sombra, una primera versión de los relojes de sol.



Adición en el sistema horario de 12 horas

Puedes escribir ecuaciones de adición en el sistema horario de 12 horas, así como lo haces en el sistema de números reales. Por ejemplo, en la Parte a de la Pregunta 2, encontraste que, en el sistema horario de 12 horas, $4 + 10 = 2$.

5. Copia y completa la tabla para mostrar *todas* las sumas posibles en el sistema horario 12 de horas.

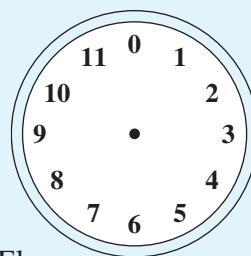
+	12	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
12												
1												
2												
3												
4												
5												
6												
7												
8												
9												
10												
11												



Hasta finales del siglo XVI, el único reloj que tenían los marineros era el reloj de arena.



En el sistema horario de 12 horas, el 12 se comporta como el 0 en el sistema de números reales: cuando sumas 12 a un número el resultado es igual al número original. Debido a esta propiedad del 12, es conveniente renombrarlo como 0. Tacha los números 12 en tu tabla y reemplázalos con 0.



6. Calcula la suma en el sistema horario de 12 horas. (El sistema horario de 12 horas ahora consta de números enteros del 0 al 11.)
- a. $4 + 8$ b. $0 + 5$ c. $6 + 11$
7. Encuentra la diagonal de los 0 en tu tabla. ¿Qué par de números suman 0?
8. Debido a que suman 0, los pares de números que identificaste en la Pregunta 7 son *inversos aditivos*.
- a. ¿Cuál es el inverso aditivo de 5 en el sistema horario de 12 horas?
- b. ¿Cuál es el inverso aditivo de 6 en el sistema horario de 12 horas?

Resuelve cada ecuación con el sistema horario de 12 horas.

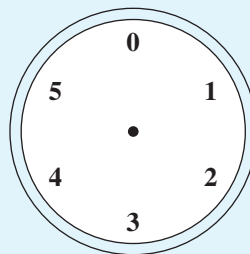
9. $x + 4 = 3$ 10. $y + 5 = 5$
11. $1 + x = 0$ 12. $4 + p = p$



Los relojes atómicos, que dan la hora basándose en la frecuencia de ondas electromagnéticas emitidas por ciertos átomos, pueden tener la precisión de alrededor de 1 segundo en más de un millón de años.

Adición en el sistema horario de 6 horas

La esfera de este reloj es para el sistema horario de 6 horas.



El sistema horario de 6 horas funciona de forma semejante a la del sistema horario de 12 horas. Por ejemplo:

$$1 + 3 = 4$$

$$2 + 4 = 0$$

$$3 + 5 = 2$$

13. Crea una tabla de adición para el sistema horario de 6 horas.

+	0	1	2	3	4	5
0						
1						
2						
3						
4						
5						

14. ¿Qué pares de números suman 0 en el sistema horario de 6 horas?

Calcula cada suma en el sistema horario de 6 horas.

15. $4 + 5$

16. $2 + 3$

17. $5 + 1$

18. $(3 + 4) + (0 + 1)$

19. ¿Cuál es el inverso aditivo de 4 en el sistema horario de 6 horas?

Resuelve cada ecuación con el sistema horario de 6 horas. Recuerda que sólo puedes usar los números del 0 al 5 en tus soluciones.

20. $x + 5 = 0$

21. $3 + y = 3$

Usando la idea del inverso aditivo, Marcus pensó en una manera de resolver ecuaciones en el sistema horario de 6 horas.



Usa el método de Marcus para resolver cada ecuación. Muestra tus soluciones.

22. $1 + j = 0$

23. $k + 2 = 1$

24. $m + 3 = 1$

¿Qué has aprendido?

- 25.** La adición funcionaría de manera semejante en otros sistemas horarios como el de 12 horas y el de 6 horas.
 - a.** Elige otro sistema horario para investigar. Dibuja la esfera del reloj de tu sistema.
 - b.** Haz una tabla que muestre todas las sumas posibles de tu sistema.
 - c.** ¿Cuál es el inverso aditivo de 2 en tu sistema horario?
- 26.** Elabora y resuelve tres ecuaciones de adición (por ejemplo, $x + 3 = 1$) para tu sistema horario.
- 27.** Escribe una explicación para otro alumno sobre cómo resolver ecuaciones de adición en tu sistema.
- 28.** Explica en qué se diferencia la adición dentro del sistema horario de la adición en el sistema de números reales.

Ejercicios por tu cuenta

Practica & aplica

Resuelve cada ecuación usando la vuelta atrás. (Usa la vuelta atrás mentalmente si puedes.) Verifica tus soluciones.

1. $5(n - 2) = 45$

2. $2(n - 5) = 7$

3. $\frac{n}{2} + 5 = 7$

4. $3(4m - 6) = 12$

5. $\frac{3m-3}{6} = 12$

6. $3\left(\frac{m}{6} - 4\right) = 12$

Resuelve cada ecuación haciendo lo mismo en ambos lados.

7. $2x + 3 = x + 5$

8. $7y - 4 = 4y - 13$

Reduce y resuelve cada ecuación.

9. $4 - 2(-5a - 10) = 30$

10. $\frac{b-2}{4} = \frac{6}{5}$

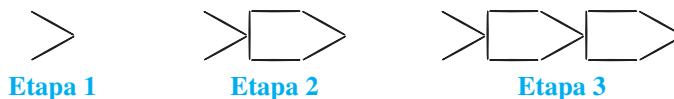
En los Ejercicios 11 al 14, escribe y resuelve una ecuación para encontrar el número de monedas que tiene cada amigo.



11. Ken tiene tres monedas más del doble que tiene Javier. Khalid tiene cinco monedas menos que Javier. Juntos tienen 50 monedas.
12. Da-Chun tiene cinco veces el número de monedas que tiene Austin. Da-Chun también tiene 16 más que Austin.
13. Kai tiene dos menos del doble de las monedas que tiene Ty. Kai también tiene 23 más que Ty.
14. Emilio tiene tres menos del doble de la cantidad que tiene Jacob. Latisha tiene 20 más de tres veces la cantidad que tiene Jacob. Juntos tienen 65.
15. Lindsey dice: —Estoy pensando en un número, si lo multiplico por 5, le resto 4 y después multiplico el resultado por 2, me da 62. ¿Cuál es mi número?
16. Hannah entrega cajas de masa para pizza a 5 pizzerías todos los jueves. Normalmente le entrega la misma cantidad de cajas a cada tienda. El fin de semana anterior al gran juego, ella recibe llamadas de los 5 restaurantes que le solicitan varias cantidades de masa.
- La Sam's Pizzeria quiere el doble del número habitual de cajas.
 - Pizza House quiere tres cajas extras.
 - Pizza Pit quiere seis cajas extras.
 - La Paul's Pizza Parlor cerrará debido al partido y desea reducir por la mitad su pedido normal.
 - Pizza Heaven quiere la cantidad habitual.

Hannah saca el total de los pedidos y dice, —No sé si tengo las 64 cajas de masa que necesito. ¿Cuántas cajas de masa recibe habitualmente cada restaurante?

- 17.** Escribe dos ecuaciones que no puedan resolverse directamente usando la vuelta atrás. Explica por qué no funciona este método.
- 18.** Evan hizo este patrón de mondadientes, Describió el patrón con la ecuación $t = 5n - 3$, donde t es el número de mondadientes en la Etapa n .



- Explica cómo se relaciona cada parte de la ecuación al patrón de mondadientes.
- ¿Cuántos mondadientes necesitaría Evan para la Etapa 10? ¿Para la Etapa 100?
- Evan usó 122 mondadientes para hacer una etapa de su patrón. Escribe y resuelve una ecuación para encontrar el número de etapa.
- ¿Hay alguna etapa del patrón compuesta por 137 mondadientes? Explica tu respuesta.
- ¿Hay alguna etapa del patrón compuesta por 163 mondadientes? Explica tu respuesta.
- Evan tiene 250 mondadientes y quiere hacer el patrón con etapas más grande que pueda. ¿Cuál es la etapa más grande que puede hacer? Explica tu respuesta.

- 19.** Recuerda que el valor absoluto de un número es su distancia desde el cero dentro de la recta numérica. Puedes resolver ecuaciones con valores absolutos. Por ejemplo, las soluciones de la ecuación $|x| = 8$ son los dos números que estén a una distancia del 8 al 0 en la recta numérica, 8 y -8 .

Resuelve cada ecuación.

- | | |
|--------------------------|---------------------------------|
| a. $ a = 2.5$ | b. $ 2b + 3 = 8$ |
| c. $ 9 - 3c = 6$ | d. $\frac{ 5d }{25} = 1$ |
| e. $ -3e = 15$ | f. $20 + 2.5f = 80$ |

En tus propias palabras

¿Cómo decides si resuelves una ecuación usando la vuelta atrás o haciendo lo mismo en ambos lados?

Repaso mixto

- 20.** Tamika y Lydia estaban haciendo cintas de pelo para venderlas en la feria de manualidades. Tamika cortó siete segmentos de una longitud y tuvo 2 pies restantes. Lydia dice: —Estoy cortando segmentos del doble de largo de los tuyos. Si la longitud de tus cintas hubiera sido de 1 pie de largo, yo podría haberle cortado cuatro segmentos.

Partiendo de su conversación, determina de qué tamaño eran los segmentos de Lydia y Tamika.

- 21.** Se usaron nueve baldosas cuadradas para cubrir un piso que tiene un área de 36 pies cuadrados.
- a.** Escribe y resuelve una ecuación para calcular las dimensiones de las baldosas.
 - b.** Dibuja y etiqueta una ilustración para mostrar cómo podrían usarse estas nueve baldosas para un piso que mide 3 por 12 pies. Suponte que, si lo necesitas, puedes cortar los baldosas por la mitad.

- 22.** Identifica tres pares de ecuaciones equivalentes.

- a.** $p = 2q - 4$
- b.** $p - 2q = 4$
- c.** $p - 2q - 4 = 0$
- d.** $-2p = 8 + 4q$
- e.** $-p - 4 = 2q$
- f.** $0.5p = q - 2$

- 23.** Enumera cuatro números que sean mayores que -2 y menores que 1 .

Cada tabla representa una ecuación lineal. Menciona si cada relación está aumentando o disminuyendo.

24.

x	y
1	2
-2	3.5
2	1.5
-3	4
0	2.5
-1	3

25.

x	y
1	3.2
-4	2.2
0	3
-1	2.8
-3	2.4
-2	2.6

26.

x	y
-4	0.5
0	-0.5
-1	-0.25
-3	0.25
-2	0
1	-0.75

- 27.** Escribe 64,256 y 1,024 con exponentes enteros y la misma base.
- 28.** Ordena estas expresiones en dos grupos de manera que las expresiones en cada grupo sean iguales unas a otras.

$$m^3 \quad \left(\frac{1}{m}\right)^3 \quad m^{-3} \quad \left(\frac{1}{m}\right)^{-3} \quad \frac{1}{m^3} \quad m \div m^4$$

Desigualdades

El signo de igualdad, $=$, expresa una comparación entre dos cantidades: dice que dos cantidades son *iguales*. La tabla enumera otros símbolos matemáticos que has usado para expresar comparaciones.

Símbolo	Quiere decir	Ejemplos
$<$	es menor que	$5 < 7$ $4 + 8 < 15$ $-17 < -4 \cdot 3$
$>$	es mayor que	$7 > 5$ $80 > 20 + 9$ $3^4 > 2^4$
$\leq$	es menor que o igual a	$5 \leq 7$ $6 \cdot -5 \leq -30$ $\frac{1}{3} \leq \frac{1}{2}$
$\geq$	es mayor que o igual a	$7 \geq 5$ $10^8 \geq 10^7$ $\frac{1}{3} \geq \frac{3}{9}$

VOCABULARIO

desigualdad

Los enunciados matemáticos que usan estos símbolos para comparar cantidades se llaman **desigualdades**. Las desigualdades anteriores sólo comparan números. También has usado desigualdades para comparar expresiones que incluyen variables.

- El enunciado $x > 7$ significa que el valor de la variable x es mayor que 7. Algunos valores posibles para x son 7.5, 12, 47 y 1,000.
- El enunciado $n - 3 \leq 12$ significa que el valor de “ n menos 3” es menor que o igual a 12. Los valores posibles para n son 15, 1.2, 0 y -5 .

Piensa & comenta

¿En qué se parece o se diferencia el significado de $7 < x$ al de $x > 7$?

A veces, es conveniente combinar dos desigualdades como éstas:

$$7 < x < 10$$

¿Qué crees que signifique $7 < x < 10$?

¿Cómo podrías escribir $7 < x < 10$ como dos desigualdades unidas por la conjunción y?

Enumera tres valores de x que satisfagan la desigualdad $7 < x < 10$.

Los termostatos se usan para controlar la temperatura de un cuarto o un edificio. ¿Cómo crees que el termostato podría usar las desigualdades para hacer esto?

El problema en esta investigación te dará más práctica para trabajar con desigualdades.

Serie de problemas A

1. Enumera seis números enteros que satisfagan la desigualdad $n + 1 < 11$.
2. Considera este enunciado: k es menor que o igual a 14 y mayor que 9.
 - a. Escribe el enunciado en símbolos.
 - b. Enumera todos los números enteros para los que la desigualdad de la Parte a sea verdadera.
3. Considera la desigualdad $15 \leq m \leq 18$.
 - a. Escribe la desigualdad en palabras.
 - b. Enumera todos los números enteros para los que la desigualdad sea verdadera.
 - c. ¿Hay otros números, no necesariamente números enteros, para los que la desigualdad es verdadera? Si es así, proporciona algunos ejemplos. ¿Cuántos son?
4. Si consideras sólo los valores de números enteros para n , cuatro de los cinco enunciados a continuación representan los mismos valores. ¿Qué desigualdad *no* es equivalente a las otras?

$$10 < n < 20$$

$$11 \leq n \leq 19$$

$$11 \leq n < 20$$

$$11 < n < 19$$

$$10 < n \leq 19$$

Enumera seis valores (no necesariamente números enteros) que satisfagan cada desigualdad o par de desigualdades.

5. $10.2 < p < 14.7$
6. $q \geq 12$ y $q > 15$
(Los valores de q deben hacer que *ambas* desigualdades sean verdaderas.)
7. $20 \geq |r| \geq 17.75$
8. $3s > 12$
9. $t > 0$ y $t^2 \leq 16$



Recuerda

El valor absoluto de un número es su distancia desde el 0 en la recta numérica:

$$|3| = 3 \quad |-3| = 3$$

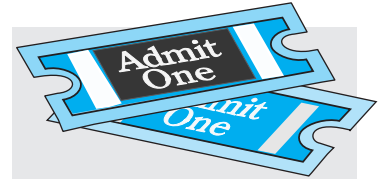
Escribirás desigualdades para representar situaciones que se describen en palabras.

Serie de problemas B

Escribe una desigualdad o par de desigualdades para describir cada situación. Asegúrate de que tus respuestas sean lo más específicas y completas en lo posible.

1. Una caja de cerillos contiene al menos 48 pero menos de 55 cerillos. Escribe una desigualdad para el número de cerillos n en la caja.

2. Tamika espera que de 100 a 120 personas compren boletos para el festival de talentos. Cada boleto cuesta \$5. Escribe una desigualdad para representar la cantidad total de dinero m que espera recibir de la venta de boletos.



3. Cuatro amigos: Sandy, Mateo, Felisa y Destiny están comparando su estatura. Sandy, quien tiene 155 cm de altura, es la más baja. Mateo tiene 165 cm de altura. Felisa no es tan alta como Mateo. Destiny es al menos tan alta como Mateo. Escribe desigualdades para representar las alturas de Felisa y Destiny, F y D .

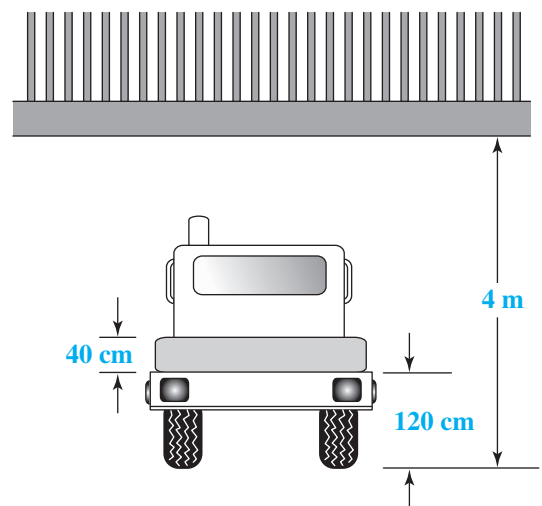
4. La tienda Completely Floored pavimentado vende baldosas cuadradas en una variedad de tamaños, con lados de longitudes en una gama de 2 cm a 20 cm. Escribe una desigualdad para representar la gama de las posibles áreas a , en centímetros cuadrados de las baldosas.

5. A Rondell le toma 15 minutos el caminar a la escuela, con 2 minutos de más o de menos. Escribe una desigualdad del tiempo t que tarda Rondell en caminar a la escuela.

6. La plataforma de carga del camión de José está a 120 cm sobre el suelo. Cada capa de cartón que él carga le añade 40 cm a la altura. Su camión cargado debe poder pasar bajo un puente peatonal que tiene 4 metros de altura.

- a. Escribe una expresión para la altura del trailer cuando lleva n capas de cartón.

- b. Usa tus expresiones para escribir una desigualdad que relacione la altura del camión cargado con la altura del puente.



7. Las familias de Chelsea y sus cuatro amigas están organizando una fiesta para el decimosexto cumpleaños de las chicas. Ellos estiman que gastarán \$7 por la comida de una persona y \$3 por las bebidas, más \$200 por contratar a un disk jockey. La cantidad total que han presupuestado es de \$500.
- a. Sea p el número de personas que pueden invitar. Escribe una expresión para el costo de la fiesta por p personas.
 - b. Usa tus expresiones para escribir una desigualdad que relacione los costos, el número de personas y el presupuesto de las familias.
8. Un arquitecto estimó que el área máxima del piso para un ascensor cuadrado en un edificio es de 4 m^2 . Las regulaciones de construcción requieren que el área mínima sea de 2.25 m^2 . Escribe una desigualdad para las posibles longitudes de los lados s para el piso del ascensor.

Comparte & resume

Inventa una situación que pueda representarse con una desigualdad. Expresa tu desigualdad en símbolos.

Investigación 2 Resuelve desigualdades

La mayoría de las ecuaciones que has resuelto tenían una o dos soluciones. Sin embargo, las desigualdades pueden tener muchas soluciones. De hecho, ¡con frecuencia tienen un número infinito!

En el Problema 8 de la Serie de problemas A, encontraste algunas de las soluciones de la desigualdad $3s > 12$. Por ejemplo, los valores 4.5, 7 y 10 satisfacen $3s > 12$. De hecho, cualquier valor mayor que 4 satisfará esta desigualdad, pero ciertamente no puedes enumerarlos a todos.

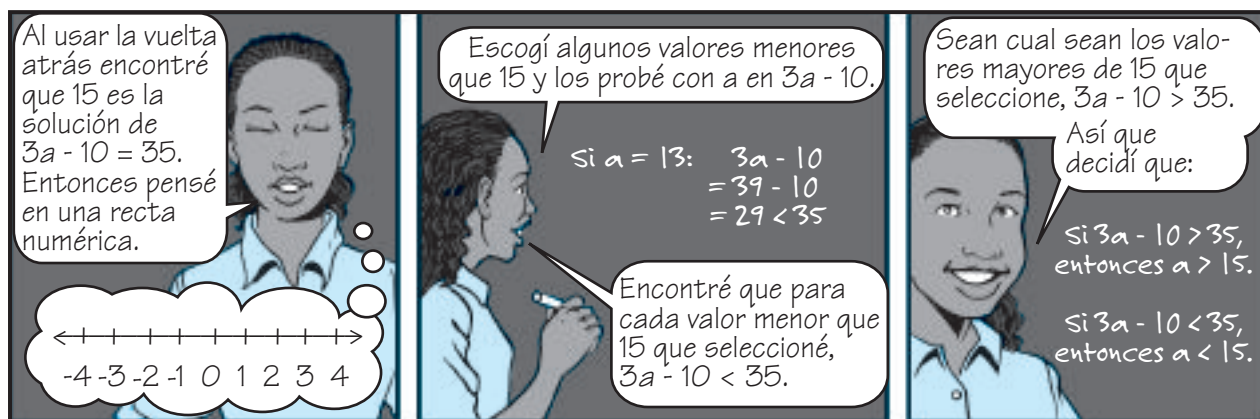
Por esta razón, las soluciones de una desigualdad a menudo se dan como otra desigualdad. Por ejemplo, puedes expresar todas las soluciones de $3s > 12$ al escribir $s > 4$.

Serie de problemas **C**

1. Resuelve cada ecuación o desigualdad. Es decir, calcula el valor o valores de a que hagan cumplir la ecuación o desigualdad.

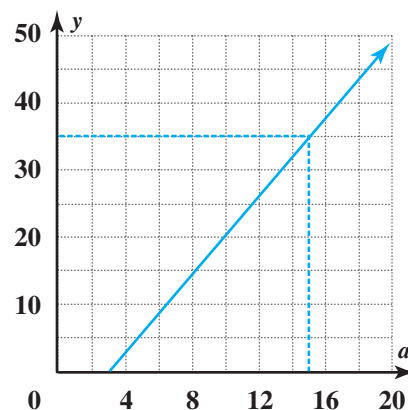
a. $3a - 10 = 35$ b. $3a - 10 > 35$ c. $3a - 10 < 35$

2. Así fue como Tamika razonó en el Problema 1.



a. Prueba por lo menos cuatro valores para a . ¿Parece correcta la conclusión de Tamika?

b. Usa esta gráfica de $y = 3a - 10$ para explicar por qué la conclusión de Tamika es correcta.



Usa el método de Tamika para resolver cada desigualdad.

3. $5a + 7 < 42$

4. $\frac{b}{7} + 1 \geq 6$

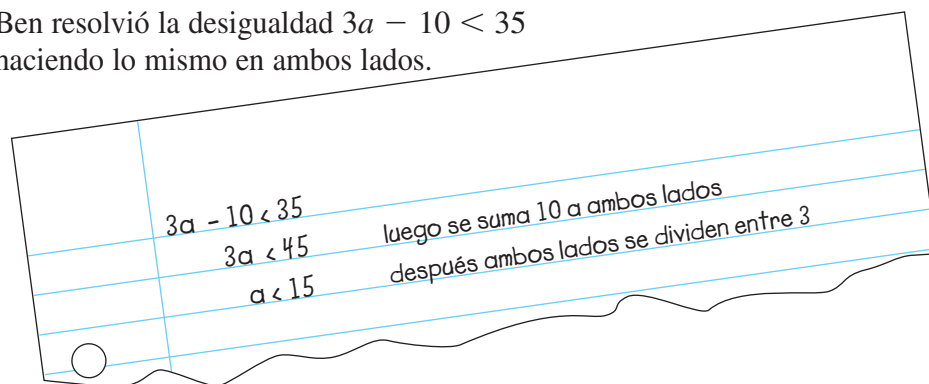
5. $4c - 3 > 93$

6. $-6(d + 1) \geq 24$

Piensa & comenta

Para resolver una desigualdad lineal de la forma $mx + b < c$ o $mx + b > c$ para x , donde a , b y c son constantes, puedes resolver la ecuación relacionada $mx + b = c$ y después probar sólo un valor mayor o menor que la solución. Explica por qué funciona este método.

Ben resolvió la desigualdad $3a - 10 < 35$ haciendo lo mismo en ambos lados.



Serie de problemas D

Usa el método de Ben (hacer lo mismo en ambos lados) para resolver cada desigualdad. Después soluciona la desigualdad con el método de Tamika (soluciona la ecuación relacionada y prueba un valor mayor o menor que la solución.) Si obtienes soluciones diferentes, di cuál es correcta.

1. $7x + 2 \geq 100$

2. $-7x + 2 \leq 100$

3. Considera estas desigualdades.

$5 < 6$

$-4 > -10$

$16 \geq 2$

$-7 < 4$

- Multiplica ambos lados de cada desigualdad por un número negativo. ¿La desigualdad resultante es verdadera? Si no, ¿cómo puedes cambiar el símbolo de la desigualdad para hacerla verdadera?
- Ahora *divide* ambos lados de cada desigualdad anterior entre un número negativo. ¿La desigualdad resultante es verdadera? Si no, ¿cómo puedes cambiar el símbolo de la desigualdad para hacerla verdadera?
- Usa lo que descubriste en las Partes a y b y explica por qué los métodos de Ben y Tamika algunas veces dan diferentes resultados.
- ¿Cómo puedes alterar el método de Ben para que siempre dé la solución correcta?

Resuelve cada desigualdad.

4. $2b > 15$

5. $-2c > 15$

6. $12 + 6d \leq 54$

7. $12 - 6e \leq 54$

8. $-3(f - 12) < -93$

9. $\frac{5g}{-7} + 1 \geq -\frac{23}{7}$

10. Resuelve la desigualdad $0 < 1 - u < 1$. Explica tu método de solución.

Comparte & resume

Supón que uno de tus compañeros se ha ausentado durante esta investigación. Explícale, por escrito, cómo resolver una desigualdad lineal y descríbele algunos errores comunes que debe evitar.

Investigación 3 **Grafica desigualdades**

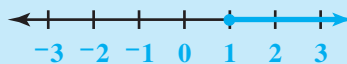
Puedes usar una gráfica de recta numérica para mostrar los valores que satisfagan desigualdades.

EJEMPLO

Esta recta numérica muestra la solución de la desigualdad $-3 \leq n < 1$. El círculo relleno indica que -3 está incluido en la solución. El círculo abierto indica que 1 *no* está incluido. La línea gruesa muestra que todos los números entre -3 y 1 están incluidos.



Enseguida está la gráfica de $x \geq 1$. La flecha indica que la solución se extiende hacia la derecha, más allá de la parte de la recta numérica que se muestra.



Esta es una gráfica de $|z| \leq 2$. Muestra que los valores de z menores o iguales a 2 y mayores o iguales a -2 son soluciones de la desigualdad.



Serie de problemas **E**

1. Considera la desigualdad $0 < b < 4.7$.
 - a. Enumera todos los valores *enteros* que satisfagan la desigualdad.
 - b. Usa tu respuesta de la Parte a como ayuda para graficar *todos* los valores que satisfagan $0 < b < 4.7$.
2. En las Partes a, b, c y d, considerarás las desigualdades $x < 10$ y $x > 5$. Dibuja una gráfica recta numérica para cada parte.
 - a. Grafica todos los valores de x para los que $x < 10$.
 - b. Grafica todos los valores de x para los que $x > 5$.
 - c. Grafica todos los valores de x para los que $x < 10$ y $x > 5$.
 - d. Grafica todos los valores de x para los que $x < 10$ ó $x > 5$.
 - e. Explica cómo las conjunciones y y o afectan a las gráficas de las Partes c y d



Las normas que rigen el tamaño para la pesca de ciertas especies de peces en aguas públicas, con frecuencia se pueden enunciar como desigualdades. En el 1999 en Florida, podías quedarte con un pez tambor negro que hubieras pescado sólo media más de 14 pulgadas y no más de 24 pulgadas.



MATERIALES
papel cuadriculado

3. En las Partes a, b y c considerarás las desigualdades $c \geq 10$ y $c \leq 5$. Dibuja una gráfica para cada parte.
 - a. Grafica todos los valores de c para los cuales $c \geq 10$ y $c \leq 5$.
 - b. Grafica todos los valores de c para los cuales $c \geq 10$ ó $c \leq 5$.
 - c. Explica cómo las conjunciones y y o afectan a las gráficas de las Partes a y b.
4. Considera desigualdades con valores absolutos.
 - a. Grafica todos los valores de m que satisfagan la desigualdad $|m| \geq 2.5$.
 - b. Grafica todos los valores de t que satisfagan la desigualdad $|t| < 3$.
5. Ahora considera la desigualdad $x^2 < 16$.
 - a. Enumera todos los valores enteros que satisfagan la desigualdad.
 - b. Usa tu respuesta de la Parte a para ayudarte a graficar *todos los valores de x* que satisfagan la desigualdad $x^2 \leq 16$.
 - c. Expresa la solución de $x^2 \leq 16$ como una desigualdad.

Resuelve cada desigualdad y grafica la solución en una recta numérica.

6. $\frac{2p}{5} < 10$

7. $-2(k - 5) \leq 10$

Puedes mostrar las soluciones de una ecuación de dos variables como $y = 2x + 3$ con una gráfica de la ecuación. Cualquier punto (x, y) en la gráfica satisface la ecuación. Ahora aprenderás a graficar desigualdades con dos variables.

Serie de problemas F

1. Grafica la ecuación $y = x$.
2. Enumera las coordenadas de tres puntos que estén sobre la recta $y = x$ y tres puntos que estén abajo de la recta.
3. ¿Cuál de las desigualdades $y > x$ o $y < x$, describe las coordenadas de los puntos que están sobre la recta $y = x$?
4. ¿Cuál de las desigualdades $y > x$ o $y < x$, describe las coordenadas de los puntos que están debajo de la recta $y = x$?
5. Con base en tu respuesta a los Problemas 3 y 4, predice si cada punto dado está arriba, abajo o sobre la recta $y = x$. Prueba cada predicción trazando el punto.
 - a. (5, 11)
 - b. (7, 3)
 - c. (0, -6)
 - d. (1, 1)
6. Enumera tres pares (x, y) que hagan verdadera la desigualdad $y > 3x$.
7. Grafica la ecuación $y = 3x$. Después traza los puntos que enumeraste en el Problema 6. ¿En dónde aparecen en tu gráfica?

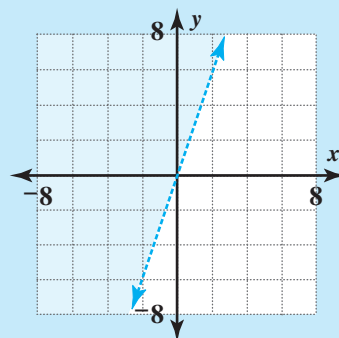


Puedes usar lo que aprendiste en la Serie de problemas F para graficar desigualdades.

EJEMPLO

Grafica la desigualdad $y > 3x$.

Primero grafica la *ecuación* $y = 3x$. Usa una línea punteada porque los puntos de la recta no hacen verdadera la desigualdad. Después sombrea el área que contiene los puntos que hace verdadera la *desigualdad* $y > 3x$. Viste en la Serie de problemas F que estos son los puntos arriba de la recta.



MATERIALES
papel cuadriculado

Serie de problemas G

Grafica cada desigualdad.

1. $y < 2x + 3$

2. $y > x + 2$

3. $y \leq -4x$

Reto Grafica cada una de estas desigualdades no lineales.

4. $y \geq x^2$

5. $y < x^2 - 1$

Comparte & resume

1. Considera estos enunciados.

$$x \geq a \text{ y } x \leq b \qquad x \geq a \text{ o } x \leq b$$

- Describe en qué se diferencian la gráfica de la recta numérica de " $x \geq a \text{ y } x \leq b$ " y la gráfica de la recta numérica de " $x \geq a \text{ o } x \leq b$."
 - Da valores de a y b para los que la gráfica de la recta numérica de " $x \geq a \text{ o } x \leq b$ " incluya todos los números.
 - Da valores de a y b para los que la gráfica de la recta numérica de " $x \geq a \text{ y } x \leq b$ " no incluya números.
2. Explica los pasos que se usan para graficar una desigualdad con dos variables. Ilústralos con un ejemplo diferente a los dados en el texto.

Ejercicios por tu cuenta

Practica & aplica

1. Enumera seis números enteros que satisfagan la desigualdad $n - 2 > 5$.
2. Considera la desigualdad $-4 < x \leq 0$.
 - a. Enumera todos los valores enteros que satisfagan la desigualdad.
 - b. Enumera tres no enteros que satisfagan la desigualdad.

Enumera cinco valores que satisfagan cada desigualdad. Incluye valores negativos y positivos, si es posible.

- | | | |
|-----------------------|-------------------------|-----------------------|
| 3. $-2n \geq 6$ | 4. $p^2 < 4$ | 5. $6 < x < 7$ |
| 6. $y > 5$ y $y > 12$ | 7. $m - 3 > 9$ | 8. $1 \leq -x \leq 5$ |
| 9. $ q < 5$ | 10. $0 \leq b \leq 6$ | 11. $ s - 5 \geq 6$ |

12. Isabel dice que se tardaría menos de una hora y media, pero no más de 2 horas, en terminar su tarea. Escribe una desigualdad para expresar el número de horas, h , que Isabel cree se tardará en hacer su tarea.
13. Sareeta gana \$0.12 por cada panfleto que entrega. Ella cree que puede entregar entre 500 y 750 panfletos el domingo. Escribe una desigualdad de la cantidad de dólares, d , que Sareeta espera ganar el domingo.
14. El Servicio de entregas Dan cobra \$9 por enviar cualquier paquete que pese 5 libras o menos. El Sr. Valenza quiere enviar una caja a su hija en la universidad, que contiene cajas metálicas con galletas. Cada caja metálica pesa 0.75 de libra y el material del paquete pesa aproximadamente 1 libra.
 - a. Escribe una expresión para representar el peso de la caja, usando t para representar el número de cajas metálicas dentro de la caja.
 - b. Usa tu expresión para escribir una desigualdad que represente el número de cajas metálicas que el Sr. Valenza puede enviar por \$9.
15. Los miércoles por la noche son especiales en la galería de videos: los clientes pueden pagar \$3.50 por entrar a la galería y después sólo \$0.25 por usar cualquier juego. Roberto llevó \$7.50 a la galería y todavía le quedó con un poco de dinero cuando se fue. Escribe una desigualdad para esta situación, usa n para representar la cantidad de juegos que usó Roberto.
16. Resuelve cada ecuación o desigualdad.
 - a. $1 - x = 0$
 - b. $1 - x < 0$
 - c. $1 - x > 0$



17. Resuelve cada ecuación o desigualdad.

a. $1 - d = 1$

b. $1 - d < 1$

c. $1 - d > 1$

Resuelve cada desigualdad.

18. $5(e - 2) > 10$

19. $\frac{f}{2} + 5 > 10$

20. $\frac{g + 2}{5} > 10$

21. $-3 \leq h - 2 \leq 1$

22. Considera la desigualdad $-7 \leq x < -1.3$.

a. Enumera todos los valores enteros que satisfagan la desigualdad.

b. Grafica *todos* los valores que satisfagan la desigualdad.

23. Considera la desigualdades $m < -3$ y $m \geq 0$.

a. Grafica todos los valores de m para los cuales $m < -3$ y $m \geq 0$.

b. Grafica todos los valores de m para los cuales $m < -3$ ó $m \geq 0$.

24. Considera la desigualdades $y \leq 3$ y $y \geq -4$.

a. Grafica todos los valores de y para los cuales $y \leq 3$ y $y \geq -4$.

b. Grafica todos los valores de y para los cuales $y \leq 3$ ó $y \geq -4$.

25. Grafica todos los valores de r para los cuales $|r - 3| \geq 3$.

26. Considera la desigualdad $x^3 \leq 27$.

a. Expresa la solución de $x^3 \leq 27$ como una desigualdad.

b. Grafica la solución en una recta numérica.

Grafica la solución de cada desigualdad en una recta numérica.

27. $-\frac{3p}{4} < 6$

28. $12 - 5q \geq 32$

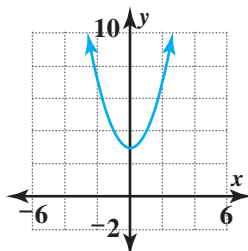
Grafica cada desigualdad.

29. $y < 3x + 7$

30. $y \leq -3x - 7$

31. $y > -2x + 4$

32. ¿Cómo cambiarías esta gráfica de $y = x^2 + 3$ para representar $y > x^2 + 3$?



33. Grafica la desigualdad $y \geq -x^2$.

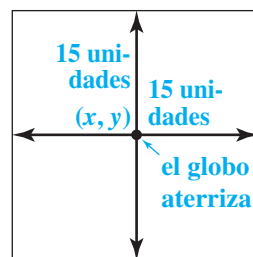
Conecta & amplía

34. **Deportes** En el boxeo amateur de los EE.UU. los boxeadores compiten en categorías que dependen de su peso. Cinco de las 12 categorías de peso oficiales se enumeran a continuación. Copia y completa la tabla para expresar los rangos de peso de cada categoría como una desigualdad.

Categorías de peso	Rangos de peso (libras)	Desigualdad
Peso súper pesado	arriba de 201	
Peso pesado	179–201	
Peso welter	140–147	$140 \leq w \leq 147$
Peso pluma	120–125	
Peso mosca	abajo de 107	

35. Megan está escribiendo un juego de computadoras en que un jugador, parado en el balcón de una casa embrujada, deja caer globos de agua sobre los fantasmas que estén abajo. El jugador elige el lugar en donde el globo caerá y después lo tira.

Ya que el agua salpica, el juego de Megan le da puntos al jugador si el fantasma está en algún punto dentro del cuadrado donde el globo cae. El cuadrado se extiende hasta las 15 unidades desde el centro y en las cuatro direcciones. Es decir, si las dos coordenadas del fantasma están a 15 unidades o menos del centro, el jugador se anota un punto.



Supón que el globo cae a (372, 425). El fantasma más cercano tiene las coordenadas (x, y) y cuenta como un punto en el juego. Usa desigualdades para describir los valores posibles para x y y . (Ayuda: Vas a necesitar dos desigualdades, una para x y otra para y . ¿Crees que deberías poner “y” o “o” entre ellas?)

En tus propias palabras

Describe en qué se diferencia el graficar una desigualdad y graficar una ecuación.

Cuando dibujas una gráfica, tienes que decidir el rango de los valores a mostrar en cada eje. Cada ejercicio a continuación te proporciona una ecuación y un rango de valores para el eje x . Usa una desigualdad para describir el rango de valores que deberías mostrar en el eje y , y explica cómo lo decidiste. (Quizá te pueda ayudar tratar de dibujar las gráficas.)

36. $y = 2x + 7$ cuando $0 \leq x \leq 10$

37. $y = 2x - 10$ cuando $-5 \leq x \leq 5$

38. $y = x^2 + 1$ cuando $-5 \leq x \leq 5$

39. $y = -2x$ cuando $-5 < x < 0$

40. **Ciencia física** El tono de un sonido depende de la frecuencia de las ondas sonoras. Los sonidos de un tono alto tienen frecuencias más altas que los sonidos de tono bajo. La mayoría de los animales, pueden oír un rango de frecuencias mucho más alto del que pueden producir. La tabla muestra los rangos de frecuencia que varios animales pueden producir y oír.

Animal	Frecuencias de los sonidos que producen (hertz)	Frecuencias de sonido que escuchan (hertz)
Ser humano	$85 \leq f \leq 1,100$	$20 \leq f \leq 20,000$
Murciélago	$10,000 \leq f \leq 120,000$	$1,000 \leq f \leq 120,000$
Perro	$452 \leq f \leq 1,080$	$15 \leq f \leq 50,000$
Saltamontes	$7,000 \leq f \leq 100,000$	$100 \leq f \leq 15,000$

Fuente: *World Book Encyclopedia*, Vol. 18. Chicago: World Book Inc., 1997.

- Haz una gráfica recta numérica que muestre el rango de frecuencias que un saltamontes puede producir pero no oír.
 - Haz una gráfica recta numérica que muestre el rango de frecuencias que un perro puede oír pero que un ser humano no puede producir.
 - Haz una gráfica recta numérica que muestre el rango de sonidos que un murciélago puede producir y que un perro puede oír.
 - Haz una gráfica recta numérica que muestre el rango de frecuencias que un perro y que un saltamontes pueden producir.
41. **Reto** Usa una gráfica para resolver la desigualdad $x^2 < x$. Explica cómo encontraste tu respuesta.
42. Haz una gráfica que muestre los valores para los que $y < 3x + 2$ y $y > x + 5$.

Repaso mixto

Escribe cada ecuación en la forma $y = mx + b$.

43. $-2y = 14x + \frac{1}{2}(6x + 12)$

44. $\frac{1}{5}(10x + 5) - 2 + 9x - 3y = y$

45. $\frac{6(x-7)}{2(3-y)} = 0.4$

Vuelve a plantear cada expresión tan simplemente como puedas.

46. $0.5a^3 \cdot 3a^3$

47. $m^7 \cdot m^{-5} \cdot b^5$

48. $(2x^{-2})^2$

49. $(-m^2n)^4$

50. $(a^m)^n \cdot (b^3)^0$

51. $\frac{(x^2y^{-3})^{-2}}{(xy)^4}$

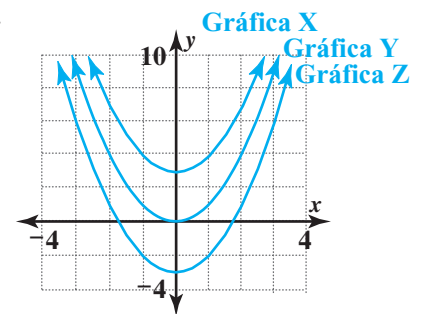
52. Geoff reunió \$65 por cada milla que caminó en una reciente campaña de recolección de fondos para estudios del cáncer, en adición a los \$100 que donó él mismo. Escribe una ecuación para la relación entre el número de millas que Geoff caminó, m , y la cantidad total de dinero que reunió, r .

53. Relaciona cada gráfica a una ecuación.

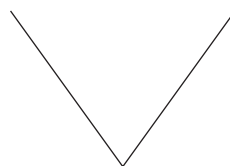
a. $y = x^2 - 3$

b. $y = x^2 + 3$

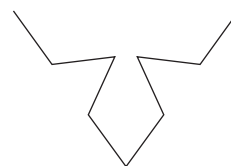
c. $y = x^2$



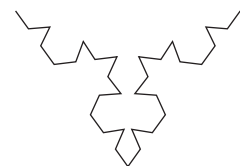
54. Examina cómo este patrón aumenta de tamaño de una etapa a la siguiente.



Etapa 0



Etapa 1



Etapa 2

a. Copia y completa la tabla.

Etapa, n	0	1	2	3
Segmentos de recta, s	2	8		

b. ¿Qué tipo de relación es ésta?

c. Escribe una ecuación para describir la relación entre la cantidad de segmentos de recta en una etapa, s , y el número de la etapa, n .

4.3

Usa gráficas y tablas para resolver ecuaciones

Algunas ecuaciones pueden resolverse con varios métodos, de manera que puedes elegir el método más fácil o rápido, o el que te guste más. Ya has resuelto ecuaciones usando la vuelta atrás, haciendo conjeturas, verificando y mejorando, y haciendo lo mismos en ambos lados.

En esta lección, aprenderás a encontrar soluciones aproximadas de ecuaciones con el uso de la calculadora graficadora. También aprenderás a cómo usar gráficas para determinar cuántas soluciones tiene una ecuación.

MATERIALES

calculadora
graficadora



Explora

Grafica $y = 3x + 3$ en tu calculadora. Usa la ventana estándar ($-10 \leq x \leq 10$ y $-10 \leq y \leq 10$).

Usa la gráfica para estimar la solución de cada una de estas ecuaciones. Explica lo que hiciste para encontrar las respuestas.

$$3x + 3 = 0 \qquad 3x + 3 = -6$$

Grafica $y = 3x^2 - 3$ en la misma ventana como $y = 3x + 3$.

Usa tu gráfica para estimar la solución de cada una de estas ecuaciones. Explica cómo encontraste las respuestas.

$$3x^2 - 3 = 0 \qquad 3x^2 - 3 = -6$$

Usa las dos gráficas para resolver la ecuación $3x + 3 = 3x^2 - 3$. Explica lo que hiciste para encontrar tu respuesta.

Investigación

1

Calcula valores a partir de una grafica

Si los cuerpos, como una pelota de tenis, se lanzan o proyectan en línea recta hacia arriba, aquéllos con una velocidad inicial más rápida irán más alto. La fuerza de gravedad frenará cada cuerpo hasta que momentáneamente alcance su altura máxima y entonces el cuerpo empezará a caer. La fórmula

$$h = vt - 16t^2$$

aproxima la altura del cuerpo arriba de su punto inicial a un cierto tiempo. Sea h la altura del objeto en pies, t el tiempo en segundos y v la *velocidad* inicial, en pies por segundo. Esta fórmula presume que la altura inicial es a nivel del suelo e ignora complicaciones como la resistencia del aire.



Galileo Galilei (1564–1642) fue el primero en descubrir las leyes matemáticas que rigen la caída de los cuerpos y la altura desde la que caen.

Supón que alguien deja caer una pelota de tenis al suelo. La pelota rebota en línea recta hacia arriba, con una velocidad de 30 pies por segundo (cerca de 20.5 millas por hora) a medida que se aleja del suelo. En este caso $v = 30$, tanto la altura de la pelota como el rebote vienen dados por

$$h = 30t - 16t^2$$

donde t es el tiempo en segundos después de que la pelota se aleja del suelo.

Puedes usar la fórmula para calcular la altura h de la pelota para diversos tiempos t . Por ejemplo, después de medio segundo, o al tiempo $t = 0.5$, la fórmula da

$$h = 30(0.5) - 16(0.5)^2$$

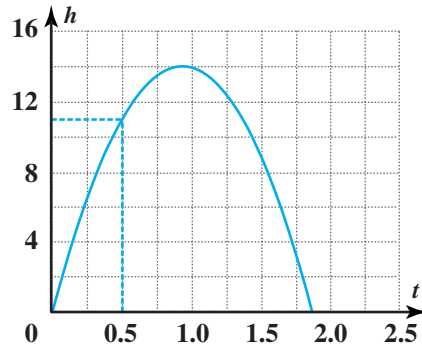
$$h = 15 - 4$$

$$h = 11$$

De manera que la pelota está a 11 pies sobre el nivel del suelo 0.5 segundos después de que se aleja del suelo.



La gráfica muestra la relación entre h y t para la ecuación $h = 30t - 16t^2$. Puedes ver en la gráfica que la pelota tiene una altura de 11 metros cuando el tiempo es 0.5 segundo.



Piensa & comenta

Después de observar la gráfica de $h = 30t - 16t^2$, Evan dijo que la pelota no rebotó en línea recta hacia arriba. ¿Por qué crees que dijo esto?

¿Tiene razón? Explica.

MATERIALES

calculadora
graficadora

Serie de problemas A

1. Puedes dibujar la gráfica de $h = 30t - 16t^2$ en tu calculadora. Cuando introduces la ecuación, usa x para t y y para h .
 - a. Grafica la ecuación $y = 30x - 16x^2$ en la ventana estándar ($-10 \leq x \leq 10$ y $-10 \leq y \leq 10$). Describe la gráfica.
 - b. Encuentra una ventana nueva que te permita identificar los puntos junto a la gráfica de $y = 30x - 16x^2$. Haz un boceto de la gráfica. Etiqueta los valores máximo y mínimo en cada eje.
 - c. Estima las coordenadas de los puntos más altos en la gráfica.
2. Puedes usar la opción Trace en tu calculadora para estimar cuándo la pelota golpea el piso.
 - a. ¿Cuál es el valor de h cuando la pelota está en el suelo?
 - b. Estima los valores de t que dan este valor de h .
 - c. Escribe la ecuación que necesitarías resolver para encontrar el valor de t cuando la pelota esté en el piso.
 - d. Verifica tus estimaciones de la Parte b, reemplazándolas en la ecuación. ¿Tus estimaciones son exactas a tus soluciones?



Debido a que deben ser extremadamente precisas, las ecuaciones para calcular la altura y velocidad de un cohete consideran factores como la resistencia del aire y la masa decreciente del cohete a medida que quema combustible.

3. Acerca de la trayectoria de la pelota, ¿qué te dice el hecho de que la ecuación tiene dos soluciones?
4. La opción de Zoom en tu calculadora te permite ver más de cerca cualquier parte de la gráfica. Para ver cómo funciona, empieza con tu gráfica del Problema 1.

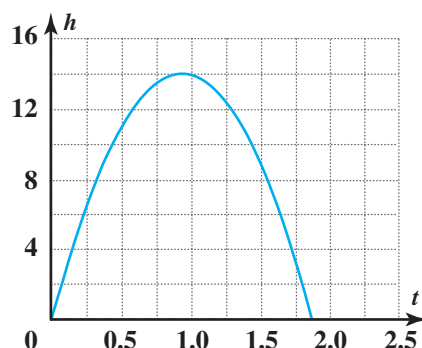
Ya usaste la opción Trace para estimar cuándo la pelota golpea el suelo por segunda vez. Ahora puedes usar la opción Zoom para obtener una mejor estimación. Selecciona Zoom In del menú Zoom y enfócate en donde la curva cruza el eje x .

Usa una vez más la opción Trace en esta nueva gráfica para tratar de obtener una estimación más precisa de una solución de $30t - 16t^2 = 0$. Verifica tu estimación reemplazándola por t en la ecuación $30t - 16t^2 = 0$. Si tu estimación no es exacta acércate una vez más y refina tu estimación de nuevo.

5. Para la fórmula $h = 30t - 16t^2$, escribe una desigualdad que muestre los valores que t puede tener. Explica tu desigualdad.

Serie de problemas **B**

1. ¿Cómo podrías usar esta gráfica de $h = 30t - 16t^2$ para estimar la solución de $30t - 16t^2 = 3$?



2. Evan dice que inmediatamente podría indicar, debido a la gráfica, que hay exactamente dos soluciones de la ecuación $30t - 16t^2 = 3$. ¿Cómo lo supo?
3. Usa las opciones Zoom y Trace de tu calculadora para encontrar la solución aproximada de $30t - 16t^2 = 3$ a la centésima más cercana.
4. ¿Qué te dice la solución de $30t - 16t^2 = 3$ sobre la trayectoria de la pelota?
5. Bharati dice que la ecuación $30t - 16t^2 = 20$ no tiene solución. ¿Cómo puede deducirlo de la gráfica?
6. Escribe otra ecuación de la forma $30t - 16t^2 = ?$ que no tenga soluciones.
7. ¿Cuántas soluciones tiene $30t - 16t^2 = 10$?
8. ¿Hay un valor de c que haría que la ecuación $30t - 16t^2 = c$, tenga exactamente una solución? Si es así, explica cómo encontrarla usando la gráfica y da el valor.
9. Para la fórmula $h = 30t - 16t^2$, escribe una desigualdad que muestre los valores que h puede tener. Explica tu desigualdad.

Comparte & resume

1. ¿Cómo puedes usar la calculadora graficadora para ayudarte a estimar soluciones de ecuaciones? Ilustra tu respuesta, escribiendo una ecuación y encontrando las soluciones aproximadas a la centésima más cercana.
2. ¿Cuántas soluciones son posibles para una ecuación de la forma $30x - 16x^2 = c$, donde c es una constante?

Investigación

2

Usa tablas para resolver ecuaciones

En la Investigación 1, estimaste soluciones de ecuaciones haciendo gráficas en una calculadora. Ahora usarás la opción de Table que tiene tu calculadora para hacer el proceso de conjetura, verifica y mejora más sistemático.



Un arte que ha existido por siglos, los tapices, son telas de algodón coloridas y exquisitamente tejidas. Hoy en día, se usan con frecuencia para decorar las paredes de casas y oficinas.

Piensa & comenta

Sonia fabrica y vende grandes tapices. Un nuevo cliente quiere un tapiz en un área de 4 metros cuadrados. Sonia decide que tendrá una forma rectangular y una longitud de 1 metro más largo que su ancho.

- Si x representa el ancho del tapiz en metros, ¿qué ecuación puede resolver Sonia para encontrar el largo y ancho del tapiz?
- Sonia usa conjetura, verifica y mejora para tratar de encontrar el valor de x . Primero traza una anchura, x , de 1 metro y calcula que el área sería de 2 m^2 . Después encuentra que para una anchura de 2 m, el área sería de 6 m^2 . ¿Qué podría usar Sonia como su tercera conjetura para x ?
- Usa el método de conjetura, verifica y mejora para encontrar el valor de x a la décima más cercana de un metro. Ten presente tus conjeturas y las áreas resultantes.
- despeja x a la centésima más cercana de un metro.
- ¿Cómo sabes si el valor que encontraste para el ancho te dará un área más cercana a los 4 m^2 que cualquier otro valor al centésimo más cercano?
- ¿Cómo podrías calcular un valor de x que te dé una aproximación todavía más cercana a un área de 4?

En Piensa & comenta de la página 245, escogiste una primera conjetura para x y después mejoraste tu conjetura paso a paso. Las calculadoras graficadoras tienen opciones que te permiten examinar muchas conjeturas en una ojeada.

MATERIALES

calculadora
graficadora



La letra griega delta, Δ , se usa para representar el aumento entre valores consecutivos en una secuencia. En muchas calculadoras, Δ se usa para indicar la cantidad del cambio en la variable x de una hilera a la siguiente, dentro de una tabla.

EJEMPLO

Intenta resolver el problema de Sonia con la opción Table. (Sigue este ejemplo con tu calculadora.)

- En la pantalla Table Setup, pon el valor x como valor inicial en 0 y el aumento en 1.
- Introduce la ecuación de Sonia en la forma $y = x(x + 1)$ o $y = x^2 + x$.

- Observa la pantalla de la Table para ver qué valor o valores de x dan valores de y más cercanos a 4.

La tabla de la derecha muestra parte de lo que puede aparecer en tu pantalla.

En la tabla, puedes ver que x debe estar entre 1 y 2 ya que los valores y correspondientes van del 2 al 6.

x	Y_1
0	0
1	2
2	6
3	12
4	20
5	30
6	42

Para explorar dos valores entre 1 y 2, usa la Configuración de la tabla para mostrar los valores de x con aumentos más pequeños.

- En la pantalla Table Setup, coloca el valor inicial x en 1 y el aumento en 0.1.

Cuando regreses a la pantalla de la Table, deberías ver una tabla como la de la derecha.

Ahora puedes ver que la solución tiene un valor x entre 1.5 y 1.6.

x	Y_1
1	2
1.1	2.31
1.2	2.64
1.3	2.99
1.4	3.36
1.5	3.75
1.6	4.16

En la Serie de problemas C, usarás el método que se muestra en el ejemplo para estimar x más precisamente.

Serie de problemas C

x	y
1.5	3.75
1.51	
1.52	
1.53	
1.54	
1.55	
1.56	
1.57	
1.58	
1.59	
1.6	

1. En el Ejemplo, la tabla muestra que el ancho del tapiz de Sonia debe estar entre 1.5 y 1.6 metros. Puedes usar la Table Setup y de nuevo mejorar la precisión de x al lugar de las centésimas.
 - a. ¿Qué valores de x y qué aumento deberías usar para obtener una estimación más exacta para x ?
 - b. Ajusta los valores de x y el aumento en la Table Setup y después mira la tabla una vez más. Tendrás que deslizarte línea a línea hacia abajo para ver todos los valores que necesites. Copia y completa la tabla de la izquierda.
 - c. ¿Entre qué par de valores de x está la solución? ¿Cuál de estos te da un área más cercana a 4? Explica.
 - d. ¿Cuáles serán la anchura y longitud del tapiz al centímetro más cercano?
2. Puedes usar la Table Setup de nuevo y mejorar la precisión de la estimación de x al lugar de las milésimas (el milímetro más cercano).
 - a. ¿Qué deberías introducir, en la Table Setup, como valor x inicial y aumento?
 - b. ¿Entre qué par de valores de x se sitúa la respuesta exacta?
 - c. ¿Cuál de los dos valores da una mejor aproximación? ¿Cómo lo sabes?
3. Otro cliente quiere un tapiz con un área de 6 metros cuadrados y una longitud 2 metros más grande que el ancho.
 - a. Escribe una ecuación que represente el área del tapiz, usa x para representar el ancho.
 - b. Usa la Table y la opción Table Setup para calcular el ancho al centímetro más cercano. Por cada nueva tabla que examines, registra los dos valores de x que te den áreas más cercanas al 6.

Tejido de algodón y seda de finales del siglo XV, éste es una de la serie de seis tapices tituladas *La dama y el unicornio*.



Usarás la opción de la Table para aproximar soluciones de ecuaciones cuadráticas. Aprenderás a cómo encontrar soluciones exactas de ecuaciones cuadráticas en el Capítulo 7.

Serie de problemas

Cada ecuación a continuación tiene dos soluciones. Usa la opción Table de tu calculadora para aproximar las soluciones al centésimo más cercano (quizá tengas que deslizarte línea a línea a través de la tabla). Verifica cada respuesta y reemplázala en la ecuación.

1. $2m(m - 5) = 48$
2. $3t(t - 5) = 48$
3. Ya que algunas ecuaciones cuadráticas tienen dos soluciones, es posible que hayas explorado una segunda solución de cada ecuación para el área de los tapices de Sonia.
 - a. ¿Cómo podrías usar una tabla de la calculadora graficadora para determinar si existe otra solución de $x(x + 1) = 4$?
 - b. Determina si hay una segunda solución de $x(x + 1) = 4$. Si es así, estímalas a la centésima más cercana. Reemplaza tu solución y verifícala.
 - c. Determina si hay una segunda solución de $x(x + 2) = 6$. Si es así, estímalas a la centésima más cercana. Reemplaza tu solución y verifícala.
 - d. ¿Podría usar Sonia las soluciones que encontraste en las Partes b y c para diseñar un tapiz? Explica tu respuesta.

Comparte resume

Piensa cómo puedes resolver estas ecuaciones.

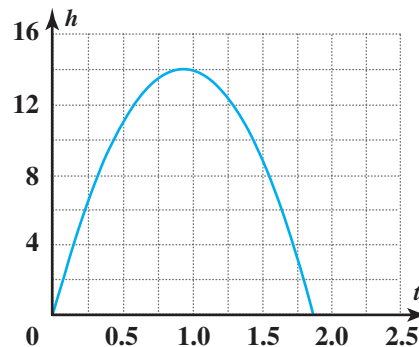
- i. $2w - 3 = 3w - 7$
 - ii. $x^3 - 2x^2 = 5$
 - iii. $3y(2y + 3) - 15 = 0$
 - iv. $5 = 3z + 1$
1. ¿Qué ecuaciones resolverías usando el método de hacer lo mismo en ambos lados o el de vuelta atrás? Explica.
 2. ¿Qué ecuaciones resolverías con la opción Table de tu calculadora? Explica.

Ejercicios por tu cuenta

Practica & aplica



1. **Ciencia física** Una pelota se lanza en línea recta hacia arriba desde el nivel del suelo con una velocidad inicial de 50 pies por segundo. La fórmula $h = 50t - 16t^2$ proporciona su altura h en pies encima del suelo en t segundos después de que es lanzada.
 - a. Dibuja una gráfica de esta fórmula con el tiempo en el eje horizontal y la altura en el eje vertical. Muestra $0 \leq t \leq 4$ y $0 \leq h \leq 40$.
 - b. ¿Cuál es el valor aproximado de t cuando la pelota golpea el suelo?
 - c. ¿Aproximadamente a qué altura llega la pelota antes de que empiece a caer?
 - d. ¿Después de aproximadamente cuántos segundos la pelota alcanza su máxima altura?
2. Supón que la fórmula $h = 30t - 16t^2$ te proporciona la altura en pies del rebote vertical de una pelota, donde t es el tiempo en segundos desde que la pelota se aleja del suelo. A continuación se muestra una gráfica de esta ecuación.



- a. En su camino ascendente, la pelota alcanzó cierta altura a el 0.5 segundo. De nuevo, alcanzó esta altura en su camino descendente, ¿Cómo podrías determinar a qué hora la bola alcanzó su altura en su camino descendente?
 - b. ¿Cuál es el valor aproximado a la centésima más cercana de este tiempo?
3. En la Investigación 1, encontraste que el valor máximo de $30t - 16t^2$ es aproximadamente 14. El valor exacto es 14.0625. Escribe una ecuación o una desigualdad para mostrar los valores de h para los que $h = 30t - 16t^2$ tiene cada número dado de soluciones.
 - a. dos
 - b. ninguna
 - c. una
 4. Dibuja una gráfica de $y = x^2 - 4x + 2$. Usa tu gráfica para encontrar un valor de d de manera que la ecuación $x^2 - 4x + 2 = d$ tenga cada número de soluciones dado.
 - a. dos
 - b. una
 - c. ninguna



5. Resuelve la ecuación $(x + 2)(x - 3) = 14$, construyendo una tabla de valores. Usa valores enteros de x entre -6 y 6 .

6. Resuelve la ecuación $k^2 - k + 3 = 45$, construyendo una tabla de valores. Usa valores enteros de x entre -9 y 9 .

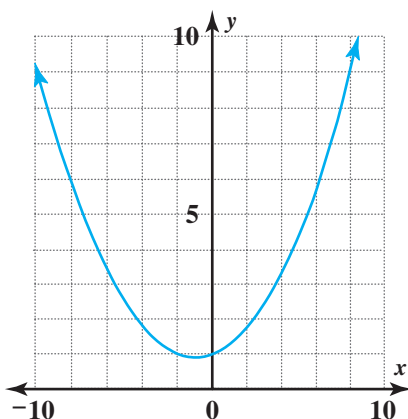
7. Examina esta tabla.

- a. Usa la tabla para estimar las soluciones de $t(t - 3) = 5$ al entero más cercano.
- b. Si estuvieras buscando soluciones haciendo una tabla con una calculadora, ¿qué tendrías que hacer para encontrar las soluciones a la décima más cercana?
- c. Encuentra dos soluciones de $t(t - 3) = 5$ a la décima más cercana.

t	$t(t - 3)$
-2	10
-1	4
0	0
1	-2
2	-2
3	0
4	4
5	10
6	18
7	28

8. La ecuación $x^3 + 5x^2 + 4 = 5$ tiene una solución entre $x = 0$ y $x = 1$. Encuentra esta solución a la décima más cercana.

9. Esta es una gráfica de $y = 0.1x^2 + 0.2x + 1$.



- a. ¿Entre qué pares de valores enteros de x se sitúan las soluciones de $0.1x^2 + 0.2x + 1 = 4$?
- b. Calcula ambas soluciones de $0.1x^2 + 0.2x + 1 = 4$ en centésimas.

Datos de interés

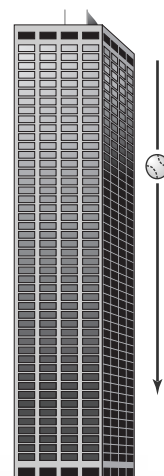
Para determinar con precisión la altura a la que va cayendo un paracaidista, debe calcularse la resistencia del aire, que depende de la velocidad del paracaidista y el área de la sección transversal.

- 10. Ciencia física** La fórmula $h = vt - 16t^2$ aproxima la altura de un cuerpo arriba de su punto inicial t segundos, después de que empieza a moverse en línea recta hacia arriba con una velocidad inicial de v pies/s.

Para una pelota que se lanza, el punto inicial generalmente será alguna distancia arriba del suelo, como a 5 pies. De manera que la altura de la pelota por encima del suelo será dada por esta fórmula, donde s es la altura inicial (a $t = 0$) y v es la velocidad:

$$h = vt - 16t^2 + s$$

- Escribe una ecuación que describa la altura h de la pelota después de t segundos si se lanza en línea recta hacia arriba con una velocidad inicial de 30 pies por segundo desde 5 pies por encima del suelo.
 - ¿Qué ecuación resolverías para encontrar cuánto tardará la pelota en llegar al suelo?
 - ¿Qué ecuación resolverías para encontrar cuánto tardará la pelota en volver a su altura inicial?
- 11.** Un objeto que se deja caer, igual a uno que se lanza hacia arriba, será atraído hacia abajo por la fuerza de gravedad. Sin embargo, su velocidad inicial será 0. Si se ignora la resistencia del aire, puedes estimar la altura h , del objeto a t tiempo con la fórmula $h = s - 16t^2$, donde s es la altura inicial en pies.
- Si una pelota de béisbol se deja caer desde una altura de 100 pies, ¿qué ecuación resolverías para determinar los segundos que pasarían antes de que la pelota golpee el suelo?
 - Resuelve la ecuación.



- 12.** Un alpinista lanzó un gancho desde la base de un acantilado. La cima del acantilado está a 100 pies arriba del alpinista. Usa la fórmula para la altura de un cuerpo lanzado, $h = vt - 16t^2$, para responder estas preguntas. (Suponte que el gancho se lanza en línea recta y, si sube lo suficiente, llegará a la cima del acantilado mientras desciende.)
- a.** ¿Puede el gancho alcanzar la cima del acantilado si su velocidad inicial es 70 pies por segundo ó 70 pps? Explica.
 - b.** Calcula una velocidad inicial que sea suficiente para que el gancho alcance la cima del acantilado.
 - c.** A una velocidad inicial de 100 pps, ¿qué altura por encima de la cima, alcanzará el gancho?
 - d.** A una velocidad inicial de 100 pps, ¿cuánto tiempo pasará hasta que, en su descenso, el gancho alcance la cima del acantilado?
- 13.** Un gato de una tira cómica empuja un piano hacia fuera de la ventana de un cuarto piso que está a aproximadamente a 50 pies sobre la acera.
- a.** Un cuerpo cae de una distancia de $s = 16t^2$ pies en t segundos. ¿Cuánto tardará en caer el piano antes de que golpee la acera?
 - b.** Supón que el gato intenta aplastar a su enemigo, el ratón, en la acera de abajo. Pero el ratón saca un trampolín de su bolsillo y el piano rebota hacia el gato a una velocidad inicial de 100 pies por segundo. La altura h del piano t segundos después de que golpea el trampolín puede calcularse con la fórmula $h = 100t - 16t^2$. Grafica esta ecuación y usa tu gráfica para estimar cuánto se tardará el piano en regresar a la ventana del cuarto piso.

- 14.** Desmond quiere hacer un marco grande para fotografías, con una tira de madera de 20 pies de largo.

a. Sea w el ancho del marco.

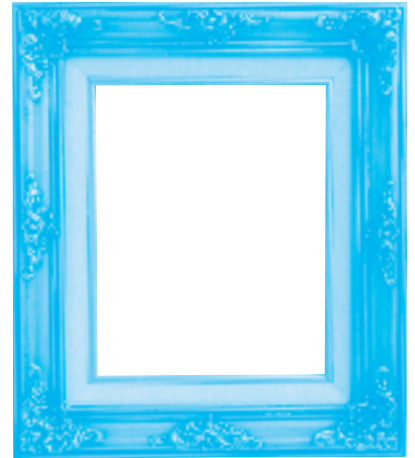
Escribe una ecuación que provea la altura del marco h en términos del ancho w .

b. Expresa el área que encierra el marco en términos del ancho.

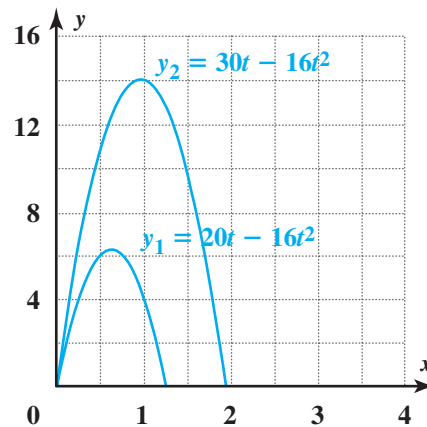
c. ¿Qué dimensiones le daría Desmond al marco para que encierre la mayor área posible?

d. ¿Qué dimensiones le daría Desmond al marco para que encierre la menor área posible?

e. Si el área que encierra es de aproximadamente 15 pies cuadrados, determina las dimensiones del marco a la décima más cercana de un pie.



- 15.** Dos objetos se proyectan, desde el suelo, en línea recta hacia arriba exactamente al mismo tiempo. Un objeto se libera a una velocidad inicial de 20 pies por segundo. El otro se libera a 30 pies por segundo. Las dos ecuaciones que relacionan las alturas de los objetos en tiempo t son $y_1 = 20t - 16t^2$ y $y_2 = 30t - 16t^2$. Estas son las gráficas de estas ecuaciones.

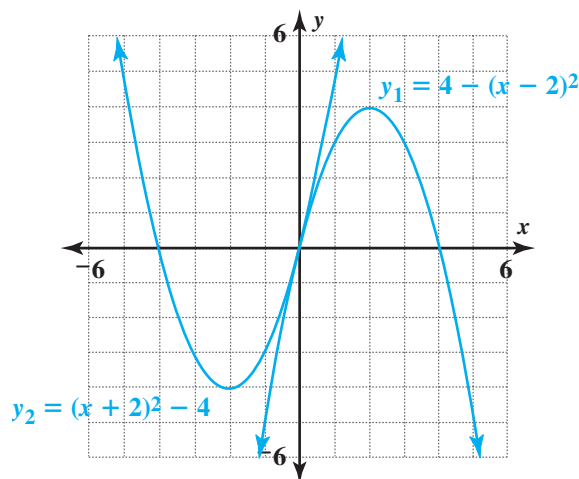


- a.** Escribe dos ecuaciones que podrías resolver para encontrar los tiempos a los que los objetos golpean el suelo.
- b.** Estos dos objetos golpean el suelo a diferentes tiempos. Usa una calculadora para encontrar la diferencia exacta entre los tiempos.

En tus propias palabras

Describe cómo graficar una ecuación te puede ayudar a estimar su solución.

16. A continuación, se muestran las gráficas de $y_1 = 4 - (x - 2)^2$ y $y_2 = (x + 2)^2 - 4$.



- El valor máximo de y_1 es 4. Explica cómo puedes identificar el valor máximo de una parábola con una tabla de valores.
- El valor mínimo de y_2 es -4 . Explica cómo puedes identificar el valor mínimo de una parábola con una tabla de valores.
- Para cada ecuación, haz una tabla de los valores de x y y para valores de x entre -3 y 3 . Sin graficar, determina si cada ecuación tiene un valor y máximo o mínimo y menciona cuál es.
 - $y = 21 - 4x - x^2$
 - $y = (x - 2)^2 - 1$
 - $y = 8 + 2x - x^2$

Repaso mixto

Encuentra una ecuación de la recta que cruza los puntos dados.

17. $(9, -0.5)$ y $(-1, 4.5)$

18. $(1, -2)$ y $(-4, -3)$

Recuerda que para las ecuaciones lineales, las primeras diferencias son constantes; y que para las ecuaciones cuadráticas, las segundas diferencias son constantes. Determina si la relación en cada tabla podría ser lineal, cuadrática o ninguna de las dos.

19.

x	y
-3	-4
-2	1
-1	4
0	5
1	4
2	1

20.

x	y
-3	7
-2	2
-1	-1
0	-2
1	-2
2	-1

21.

x	y
-3	0
-2	-0.5
-1	-1
0	-1.5
1	-2
2	-2.5



El dato sobre el valor de g es invaluable para los científicos que trabajan con los satélites que giran en órbita alrededor de la Tierra.

22. Ciencia física Los cuerpos que caen lo hacen cada vez más rápido, o *aceleradamente*, debido a la fuerza de gravedad. La aceleración dada a la gravedad se representa por g . Cerca de la superficie de la Tierra, g tiene un valor de aproximadamente 9.806 metros por segundos al cuadrado, ó 9.806 m/s^2 .

Altura, h (m)	Valores de g (m/s^2)
0	9.806
1,000	9.803
4,000	9.794
8,000	9.782
16,000	9.757
32,000	9.71

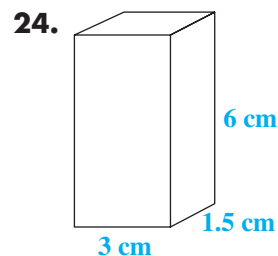
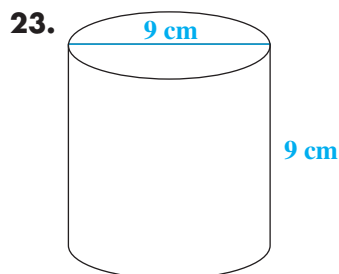
A medida que un cuerpo se aleja de la superficie de la Tierra, la fuerza de gravedad disminuye, de manera que el valor de g disminuye. La tabla muestra los valores aproximados de g para diferentes alturas sobre la superficie de la Tierra.

a. Grafica los datos en ejes como los que se muestran a continuación.



- b. ¿Parecen los datos ser aproximadamente lineales?
- c. Dibuja una recta que se adapte a los datos lo mejor posible, y encuentra una ecuación de tu recta.
- d. Usa tu ecuación o gráfica para predecir el valor de g a una altura de 1,000,000 m.

Geometría Encuentra el volumen y el área de superficie de cada sólido.



Resuelve sistemas de ecuaciones

Puedes pensar en una ecuación como una condición que una variable o variables deben satisfacer. Por ejemplo, la ecuación $x + 2y = 6$ establece que la suma de x y $2y$ debe ser igual a 6. Un número infinito de pares de valores satisfacen esta condición, como $(0, 3)$, $(2, 2)$ y $(-2.3, 4.15)$.

Cuando hay una segunda ecuación o condición que las mismas variables deben satisfacer, algunas veces sólo un par satisface *ambas* ecuaciones. Por ejemplo, la única solución que tanto $x + 2y = 6$ y $x = y$ satisfacen es $(2, 2)$.

En la siguiente actividad, tú y tus compañeros harán “gráficas humanas” para encontrar los pares de valores que satisfagan dos ecuaciones.

Explora

Escoge un equipo de nueve alumnos para hacer la primera gráfica. El equipo debe seguir estas reglas:

- Pónganse en línea a lo largo del eje x , del -4 al 4 .
- Multiplica por 2 el número en que estés parado y resta 1.
- Cuando tu maestro diga “¡Adelante!” camina hacia adelante o atrás del valor de y igual a tu resultado a partir del paso anterior.

Describe la “gráfica” resultante. ¿Cuál es su ecuación? Haz que dos alumnos expliquen por qué sus coordenadas son la solución de esta ecuación.

A continuación, harás dos gráficas en la misma cuadrícula. Elige dos equipos de nueve alumnos. El Equipo 1 debe seguir sus instrucciones y permanecer en sus puntos mientras el Equipo 2 sigue sus instrucciones.

Equipo 1: Gráfica de $y = 2x$

- Ponte en línea a lo largo del eje x .
- Multiplica por 2 el número en que estás parado.
- Cuando tu maestro diga “¡Adelante!” camina hacia adelanteo atrás ese número de pasos.

Equipo 2: Gráfica de $y = -x + 3$

- Ponte en línea a lo largo del eje x .
- Multiplica por -1 el número en que estás parado y súmale 3.
- Cuando tu maestro diga “¡Adelante!” camina hacia adelanteo atrás ese número de pasos.

¿Están algunos alumnos tratando de pararse en los mismos puntos? Si comparten puntos en la misma gráfica, ésta debe ser una solución de ambas ecuaciones. Verifica que sea verdad.

Ahora elige dos nuevos equipos y haz una nueva gráfica humana para encontrar pares ordenados que sean las soluciones de $y = 3x$ y $y = x + 4$.

Investigación 1 **Grafica sistemas de ecuaciones**

VOCABULARIO

sistema de ecuaciones

En el Explora, encuentre un par (x, y) que era la solución de dos ecuaciones. A un grupo de dos o más ecuaciones se le llama **sistema de ecuaciones**. Una solución de un sistema de ecuaciones es un grupo de valores que hacen verdaderas a todas las ecuaciones.

En la Serie de problemas A, vas a concentrarte en el método de graficar para resolver sistemas de ecuaciones.

MATERIALES

papel cuadriculado
calculadora
graficadora

Serie de problemas **A**

1. Considera estas cinco ecuaciones.

i. $2x + 3 = 7$

ii. $x^2 + 5x + 6 = 0$

iii. $(x - 2)^2 = 0$

iv. $2x + y = 7$

v. $3x - y = 3$

- a. Cada una de las Ecuaciones i, ii y iii contienen una variable. ¿Cuántas soluciones tiene cada ecuación? Encuentra las soluciones con cualquier método de tu elección.
- b. Tanto las Ecuaciones iv como la v presentan dos variables. ¿Cuántas soluciones tiene cada ecuación? ¿Podrías enumerarlas? Explica por qué sí o por qué no.
- c. Considera las Ecuaciones iv y v. ¿Podrías graficar las soluciones de $2x + y = 7$? ¿Puedes graficar las soluciones de $3x - y = 3$? Explica.
- d. Dibuja las gráficas de $2x + y = 7$ y de $3x - y = 3$. ¿En qué punto se encuentran?
- e. ¿Qué valores de x y y hacen que $2x + y = 7$ y $3x - y = 3$ sean verdaderas? Es decir, ¿cuál es la solución de este sistema de ecuaciones? ¿Cómo se relaciona este valor a tu respuesta de la Parte d?



En los Problemas 2 y 3, resuelve el sistema de ecuaciones lineales con este método:

- Vuelve a escribir cada ecuación de manera que y esté sola en un lado.
- Grafica ambas ecuaciones en tu calculadora.
- Si las rectas se encuentran, estima las coordenadas x y y de su intersección. Esta quizá no sea una solución exacta, pero te dará una estimación de la solución.
- Verifica que estos valores satisfagan ambas ecuaciones.

2. $2y - x = 20$ y $2x = 5 - y$ **3.** $y = 4$ y $x + y = -1$

4. Considera estas dos ecuaciones.

$$x + y = 5 \qquad 2x = 12 - 2y$$

- Grafica ambas ecuaciones en un par de ejes.
 - ¿Se intersecan las gráficas?
 - ¿Cómo podrías verificar tu respuesta de la Parte b observando las ecuaciones?
 - ¿Tiene solución este sistema de ecuaciones? ¿Cómo lo sabes?
- 5.** Haz tu propio sistema de ecuaciones para el que pienses que no haya solución.
- 6.** Considera estas tres ecuaciones.

$$4x + 2y = 7 \qquad y = -2x + 5 \qquad 3x = 5y - 4$$

- Selecciona dos que formen un sistema de ecuaciones que no tenga solución.
 - Selecciona dos que formen un sistema sin solución.
- 7.** Considera este sistema de ecuaciones.

$$2x - y = 4 \qquad 5x - 2.5y = 10$$

- La pendiente de la recta para cada ecuación es 2. ¿Cuántas soluciones crees que tendrá este sistema?
 - Sin usar la calculadora, dibuja las gráficas de las ecuaciones.
 - ¿Qué observas en las dos gráficas?
 - ¿Cuántas soluciones crees que tiene este sistema?
 - ¿Por qué crees que este sistema de ecuaciones es diferente al sistema del Problema 4?
- 8.** Ben tiene el doble de años que su hermano pequeño, Alex. Hace cuatro años, Ben tenía cuatro veces más la edad de su hermano Alex.
- Escribe dos ecuaciones que relacionen las edades de Alex y Ben.
 - Encuentra, con una gráfica, las edades de Ben y Alex.





Los fabricantes necesitan resolver sistemas de ecuaciones por muchas razones. Por ejemplo, una compañía que construye puertas debe hacerlo para determinar la cantidad de vidrio, madera y aluminio necesaria para la producción de una semana en particular.

Serie de problemas B

Es posible encontrar soluciones de sistemas de ecuaciones que no sean lineales.

1. Usa la gráfica para resolver este sistema de ecuaciones. Vuelve a plantear estas ecuaciones antes de graficarlas, si es necesario. ¿Cuántas soluciones puedes encontrar?

$$y - x - 1 = 0 \qquad y = x^2 - 3x + 4$$

2. Considera la ecuación $x + 1 = x^2 - 3x + 4$.

- a. Sigue estos pasos para resolver esta ecuación con una tabla:

- Introduce dos ecuaciones, $y_1 = x + 1$ y $y_2 = x^2 - 3x + 4$, en la calculadora.
- Usa las opciones TableSet y Table para hacer tablas de dos ecuaciones.
- Examina la tabla para los valores de x en los que y_1 y y_2 sean iguales. Haz tablas nuevas, con aumentos más pequeños si es necesario.

- b. ¿Cómo se relacionan las soluciones de esta ecuación con lo que encontraste en el Problema 1? Explica por qué las soluciones están relacionadas así.

- c. Ahora usa una tabla o gráfica para resolver $x^2 - 4x + 3 = 0$. ¿En qué se diferencian las soluciones de esta ecuación con tu resultado de la Parte a? Explica.

Comparte & resume

1. Describe cómo estimar la solución de un sistema de dos ecuaciones usando una gráfica.
2. Describe cómo podrías crear un sistema de ecuaciones lineales sin solución.

Investigación 2 Problemas que incluyen sistemas de ecuaciones

A veces, las soluciones de un problema práctico requieren plantear y resolver un sistema de ecuaciones. En esta investigación, vas a usar gráficas para encontrar soluciones a dichos problemas.

MATERIALES
papel cuadriculado

Explora

Dos librerías reciben pedidos por catálogo. Cada una cobra el precio estándar por los libros, pero tienen diferentes cargos en el servicio de entrega. La librería Gaslight cobra una tarifa de \$3 por pedido más \$1 por libro, mientras que la librería Crimescene cobra \$5 por pedido y \$0.50 por libro.

Para cada librería, escribe una ecuación que describa cómo se relaciona el costo de envío y con el número de libros x . Después grafica ambas ecuaciones en los mismos ejes.

¿Bajo qué circunstancias ordenarías en Gaslight? ¿Cuándo ordenarías en Crimescene? ¿Hay circunstancias en las que no haya diferencia en qué librería comprar?

¿Qué otras cosas podrías considerar (no matemáticas) cuando trates de decidir?

MATERIALES
papel cuadriculado

Serie de problemas C

En la tienda Shikara's Music Emporium, se venden casetes a \$10 y discos compactos a \$15.

1. La familia de Kai compró 16 artículos. Enumera algunos valores posibles para la cantidad de casetes t y discos compactos d que compraron.
2. Escribe una ecuación que describa la cantidad total de artículos que compró la familia de Kai.
3. Traza puntos en una cuadrícula para mostrar los pares (t, d) que satisfacen la ecuación en el Problema 2. Recuerda, t y d deben ser números enteros.
4. Supón que en lugar de decirte cuántos artículos compraron, Kai te dijo que su familia gastó \$220. Enumera algunos valores posibles para el número de casetes t y el número de discos compactos d que tengan un precio total de \$220.



MATERIALES

papel cuadriculado



Recuerda

Si dos artículos x y y son proporcionales, están relacionados por una ecuación lineal $y = mx$, donde m es una constante.

5. Escribe una ecuación para relacionar la cantidad total de dólares que la familia de Kai gastó en casetes y discos.
6. En la misma cuadrícula, traza todos los pares de valores en números enteros que satisfacen la ecuación en el Problema 5. Quizá quieras usar un color o símbolo diferentes para estos puntos.
7. Usa tu gráfica para encontrar los valores posibles de t y d si los enunciados de los Problemas 1 y 4 son verdaderos.

Serie de problemas D

La dueña de un comercio de sombreros tiene *gastos fijos* de \$3,000 por semana. Ella tiene estos gastos independientemente del número de sombreros que fabrique.

El resto de los gastos son *costos variables*, como materiales y mano de obra. Estos costos son proporcionales al número de sombreros que fabrique. Por ejemplo, en una semana en que se fabricaron y vendieron 500 sombreros, sus costos variables fueron \$7,500. En una semana en que se fabricaron 1,000 sombreros, fueron \$15,000.

Todos los sombreros se vendieron a tiendas por departamentos a \$20 cada uno.

1. Escribe una ecuación que relacione el ingreso i con la cantidad de sombreros vendidos n .
2. Considera los costos del fabricante de sombreros.
 - a. Escribe una expresión de los *costos variables* a para producir n sombreros. Es decir, si la tienda fabrica n sombreros en una semana, ¿cuáles serán los costos variables?
 - b. Escribe una ecuación que relacione el costo total por semana, c , y la cantidad de sombreros fabricados y vendidos en una semana, n . Recuerda que el costo total incluye tanto los costos variables como los gastos fijos.
3. La diferencia entre el costo y el ingreso es la ganancia del dueño. Si el fabricante no tiene ventas, ella aún tendrá que pagar los costos fijos, y consecuentemente tendrá una gran pérdida. Si tiene muchas ventas, fácilmente cubrirá sus costos y tendrá una buena ganancia.
 - a. En una semana particular, la fabricante de sombreros hizo y vendió 500 sombreros. ¿Obtuvo ganancias o pérdidas? ¿De cuánto?
 - b. En otra semana, ella hizo y vendió 1,000 sombreros. ¿Obtuvo ganancias o pérdidas? ¿De cuánto?



4. En algún punto entre la ausencia de ventas y una gran cantidad de ventas existe un número de ventas llamado *punto de equilibrio*. Este es el punto en que los costos y los ingresos son iguales, entonces no hay ganancias ni pérdidas.

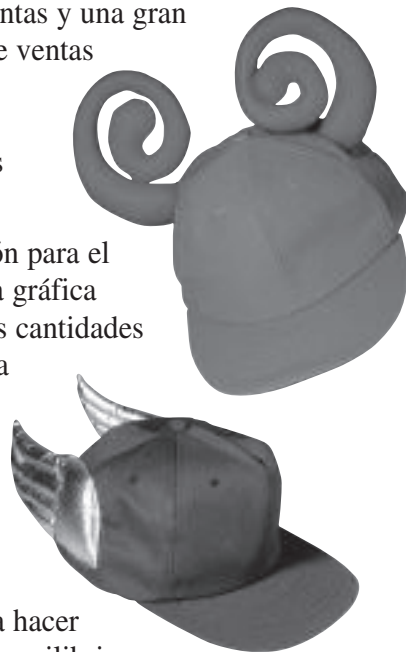
a. En un par de ejes, grafica la ecuación para el ingreso y las ganancias. Rotula cada gráfica con su ecuación. Necesitarás leer las cantidades de tu gráfica, de manera que usa una escala apropiada y sé tan preciso como puedas.

b. ¿Cómo puedes usar tu gráfica para estimar el punto de equilibrio?

c. De tu gráfica, estima el número de sombreros que el fabricante necesita hacer y vender cada semana para estar en equilibrio. Calcula los costos e ingresos para ese número de artículos y verifica tu estimado. Mejora tu estimado si es necesario.

d. Usa tu gráfica para estimar el número de sombreros que se necesitan vender cada semana para tener una ganancia de \$1,000 por semana. Calcula los costos e ingresos para ese número de artículos y verifica tu estimado. Mejora tu estimado si es necesario.

e. Usa las ecuaciones que escribiste en los Problemas 1 y 2 para escribir una ecuación que proporcione el valor de n en que los costos e ingresos sean iguales. Resuelve tu ecuación para encontrar el punto de equilibrio.



Comparte & resume

1. Describe una situación que requeriría resolver un sistema de ecuaciones para encontrar la respuesta.
2. ¿Cuál es la relación entre una gráfica que describe el ingreso y los gastos de un negocio en particular? ¿Y el punto de equilibrio para ese negocio?
3. ¿Cuál es la relación entre un sistema de ecuaciones que describe el ingreso y los gastos de un negocio en particular? ¿Y el punto de equilibrio para ese negocio?

Resuelve sistemas de ecuaciones mediante sustitución

Puedes encontrar o estimar la solución de un sistema de ecuaciones al graficar las ecuaciones y encontrar las coordenadas de los puntos en donde se intersecan las gráficas. También puedes resolver sistemas al trabajar con las ecuaciones algebraicamente. Para ver cómo funciona esto, considera la situación que se describe a continuación.

La mamá de Ana la llevó a comprar calcetines nuevos.



Para calcular el costo de cada tipo de calcetines, puedes escribir y resolver un sistema de ecuaciones. Sea x el precio de los calcetines lisos y sea y el precio de los calcetines de diseñador.

Los calcetines de diseñador cuestan \$1 más que el doble del costo de los calcetines lisos.

El precio de 3 pares de calcetines lisos y 1 par de calcetines de diseñador es \$11.

$$y = 2x + 1$$

$$3x + y = 11$$

Para calcular el costo de los calcetines, necesitas encontrar un par (x, y) que es una solución para ambos $y = 2x + 1$ y $3x + y = 11$. Es decir, necesitas resolver este sistema de ecuaciones:

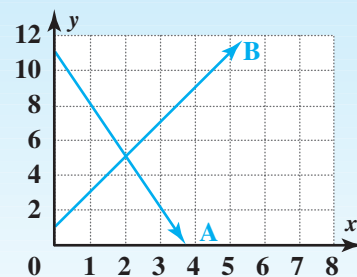
$$y = 2x + 1$$

$$3x + y = 11$$

Piensa & comenta

Las gráficas de $y = 2x + 1$ y $3x + y = 11$ se muestran a la derecha.

- ¿Qué gráfica es cuál?
- Usa la gráfica para resolver el sistema de ecuaciones. ¿Cuánto cuesta cada tipo de calcetines?



También puedes resolver este sistema algebraicamente. La primera ecuación dice que y debe ser igual a $2x + 1$. Como el valor de y debe ser el mismo en *ambas* ecuaciones, puedes *reemplazar* $2x + 1$ por y en la segunda ecuación. Esto te da una ecuación lineal con una sola variable, que ya sabes cómo resolver.

$$3x + y = 11 \Rightarrow 3x + (2x + 1) = 11$$

$$5x + 1 = 11$$

$$5x = 10$$

$$x = 2$$

De manera que $x = 2$, y como $y = 2x + 1$, sabes que $y = 5$. Esto significa que los calcetines lisos cuestan \$2 y los calcetines de diseñador cuestan \$5. Verifica esta solución al reemplazarla en *ambas* ecuaciones.

VOCABULARIO

sustitución

Este método algebraico para determinar soluciones se llama **sustitución** porque implica *reemplazar* una expresión de una ecuación para una variable en otra ecuación.

Serie de problemas E

Usa la sustitución para resolver cada sistema de ecuaciones. Verifica cada solución al reemplazarla en ambas ecuaciones originales.

1. $a = 3 - b$
 $4b + a = 15$

2. $x = 2 - y$
 $8y + x = 16$

3. Evan sugirió resolver el Problema 1 al reemplazar $3 - b$ para a en la *primera* ecuación. ¿Funcionará el método de Evan? Explica por qué sí o por qué no.

Como descubrirás a continuación, algunas veces debes describir una de las ecuaciones en un sistema antes de que puedas determinar cuál expresión reemplazar.

Serie de problemas **F**

1. Considera este sistema de ecuaciones.

$$x + y = 8 \qquad 4x - y = 7$$

- Vuelve a escribir una de estas ecuaciones para que y quede sola en un lado.
 - Resuelve el sistema por sustitución. Verifica tu solución, reemplazándola dentro de las ecuaciones originales.
2. Para resolver el sistema en el Problema 1, pudiste haber vuelto a escribir la primera ecuación, para dejar x sola a un lado. Resuelve el sistema de esta forma. ¿Obtuviste la misma respuesta?
3. Carinne anotó 23 puntos en el juego de básquetbol de anoche. En total, 10 de sus tiros entraron; algunos fueron de 2 puntos y los otros fueron de 3 puntos. Sea a la cantidad de tiros de 2 puntos y b la cantidad de tiros de 3 puntos.

- Escribe una ecuación para el total de tiros que entraron.
- Escribe una ecuación del total de puntos que Carinne anotó.
- ¿Cuántos tiros de 2 puntos anotó Carinne? ¿Cuántos tiros de 3 puntos?



4. Considera este sistema de ecuaciones.

$$y - 2x = 3 \qquad 2y + 5x = 27$$

- Grafica las ecuaciones en tu calculadora y estima el punto de intersección.
- Resuelve el sistema de ecuaciones con sustitución. Compara tu solución con la aproximación que encontraste en la Parte a.
- ¿Qué ventaja tiene el resolver ecuaciones lineales con sustitución sobre el resolverlas graficando?

Comparte & resume

Describe los pasos para resolver un sistema de dos ecuaciones por sustitución.

Resuelve sistemas de ecuaciones mediante eliminación

Resolver sistemas de ecuaciones con *eliminación* es algunas veces más fácil que resolverlas con sustitución. El método de eliminación usa la idea de hacer lo mismo en ambos lados de la ecuación.

Piensa & comenta

Considera este sistema de ecuaciones.

$$\begin{aligned} 5x + 4 &= 13 + 3y \\ 2x &= 3y \end{aligned}$$

Para resolver el sistema Gabriela primero intentó lo siguiente:

$$\begin{array}{r} 5x + 4 = 13 + 3y \\ - 2x \qquad \qquad - 3y \\ \hline 3x + 4 = 13 \end{array}$$

Gabriela dijo que estaba haciendo lo mismo en ambos lados de la primera ecuación. ¿Es cierto? Explica.

De alguna manera, lo que hizo Gabriela fue restarle a la primera ecuación la segunda. Al hacer esto, ¿qué variable *eliminó* Gabriela?

¿De qué manera crees que el eliminar esta variable le ayudará a encontrar la solución?

Si $3x + 4 = 13$, sabemos que $x = 3$. El reemplazar este valor dentro de cualquiera de las ecuaciones originales te da $y = 2$. Por lo tanto, la solución de este sistema es $(3, 2)$.

VOCABULARIO

eliminación

Al restar o sumar ecuaciones algunas veces puedes eliminar una variable y resolverla por la otra. A este proceso se le llama método de **eliminación**.

A veces vas a necesitar volver a escribir una o varias ecuaciones antes de que puedas eliminar una de las variables. El ejemplo en la página siguiente te demuestra esta técnica.

EJEMPLO

Resuelve el sistema que consiste en Ecuaciones A y B.

① El coeficiente de y en la Ecuación A es -4 , de manera que multiplica ambos lados de la Ecuación B por 2, para que $-2y$ sea $-4y$. Vuelve a escribir las 2 ecuaciones.

② Ahora resta la nueva Ecuación C de la Ecuación A, como lo hizo Gabriela en Piensa & comenta. Ya que $-4y - (-4y) = 0$ la variable y ha sido eliminada de las ecuaciones.

Esto deja sólo una ecuación con x como variable. Resuelve para x , que da la ecuación $x = 20$.

③ Ahora reemplaza ese valor en cualquiera de las ecuaciones originales para encontrar el valor de y .

$7x - 4y = 100$ [A]
$3x - 2y = 40$ [B]
① $7x - 4y = 100$ [A]
$6x - 4y = 80$ [C]
② $7x - 6x = 100 - 80$
$x = 20$
③ Reemplaza $x = 20$ en [B]:
$3(20) - 2y = 40$
$-2y = -20$
$y = 10$
Verifica en la Ecuación [A]
y en la Ecuación [B].
De modo que la solución del sistema es $(20, 10)$.



Las personas en distintas profesiones usan los sistemas de ecuaciones en su trabajo. Los fabricantes de alimento para animales de granja podrían determinar la cantidad de varios ingredientes de un alimento en particular, por ejemplo, para estar seguros de que contengan ciertas proporciones de proteína, fibra y grasa.

Piensa & comenta

En el Ejemplo, x pudo haber sido seleccionada como la variable a eliminar; pero parecía más fácil eliminar y . ¿Por qué sería esto?



Serie de problemas



Recuerda

Las ecuaciones equivalentes tienen las mismas soluciones. Siempre puedes transformar una ecuación a un equivalente al aplicar el método de hacer lo mismo en ambos lados, mientras no multipliques por 0.

1. Considera este sistema. Debes poder resolverlo simplemente *sumando* las ecuaciones para eliminar y . Inténtalo. ¿Cuál es la solución?

$$\begin{aligned}9x - 2y &= 3 \\3x + 2y &= 9\end{aligned}$$

Confirma que las ecuaciones en cada par sean equivalentes. Explica qué debes hacer en ambos lados de la primera ecuación para obtener la segunda ecuación.

2. $3m + 2 = 13.5$
 $12m + 8 = 54$
3. $x + 4y = 2$
 $2x = -8y + 4$
4. $7d + 1 = 4p$
 $21d = 12p - 3$

Lo primero al usar el método de eliminación es decidir cómo eliminar una de las variables. El truco es escribir ecuaciones (que sean equivalentes a las que empezaste) en las que los coeficientes de una de las variables sean opuestos o iguales.

5. Considera estos cuatro sistemas de ecuaciones.

- i. $x + 2y = 9$ [A]
 $3x + y = 7$ [B]
- ii. $7x - y = 4$ [C]
 $2x + 3y = 19$ [D]
- iii. $35x - 6y = 1$ [E]
 $7x + 3y = 10$ [F]
- iv. $5x + 3y = 42$ [G]
 $2x + 8y = 78$ [H]

- a. Observa el Sistema i. Podrías eliminar x reemplazando la Ecuación A con una ecuación equivalente que contenga el término $3x$ o $-3x$. ¿Qué le harías a la Ecuación A? ¿Qué obtendrías?
- b. Para el sistema i, podrías elegir eliminar y en lugar de x . ¿Cómo podrías hacerlo?
- c. Observa el Sistema ii. ¿Qué variable eliminarías? ¿Qué ecuación volverías a escribir? ¿Qué harías luego?
- d. Para el Sistema iii, indica cuál variable eliminarías y cómo lo harías.
- e. Para el Sistema iv, necesitarás escribir equivalencias para ambas ecuaciones. ¿Qué variable elegirías eliminar, y cómo lo harías?
6. Resuelve los Sistemas i, iii y iv con eliminación. Verifica que cada solución se ajuste a ambas ecuaciones.

El reemplazar y eliminar funciona para cualquier sistema de ecuaciones lineales. Aunque algunos problemas son más fáciles de resolver con un método que con el otro.

Serie de problemas H

Resuelve de dos maneras cada sistema de ecuaciones, primero con *sustitución* y después con *eliminación*. En cada caso, compara las dos aproximaciones por comodidad, velocidad y probabilidad de errores. Para cada sistema de ecuaciones, ¿crees que un método sea mejor? Explica.

$$\begin{aligned} 1. \quad & 3x = y + 7 \\ & 5x = 9y + 41 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2. \quad & 5x - 3y = 10 \\ & 15x + 6y = 30 \end{aligned}$$

3. Rima esta desconcertada. Ha tratado de resolver este sistema de ecuaciones con sustitución y eliminación, pero ninguno de los dos métodos parece funcionar.

$$\begin{aligned} x + y &= 4 \\ 3x + 3y &= 11 \end{aligned}$$

- Trata de resolver las ecuaciones con una gráfica. Explica por qué Rima tiene problemas.
- Trata de resolver las ecuaciones con sustitución. ¿Qué sucede?
- Ahora resuelve las ecuaciones con eliminación ¿Qué sucede?
- Rima descubrió que había copiado las ecuaciones de manera incorrecta. Este es el sistema correcto.

$$\begin{aligned} x + y &= 4 \\ 3x + 3y &= 12 \end{aligned}$$

Resuelve este sistema de ecuaciones con sustitución, eliminación o con gráficas.

Comparte & resume

- Inventa un sistema de ecuaciones lineales que sea fácil de resolver con sustitución. Explica por qué crees que la sustitución es un buen método.
- Inventa un sistema de ecuaciones lineales que sea fácil de resolver con eliminación. Explica por qué crees que la eliminación es un buen método.
- Inventa un sistema de ecuaciones lineales que no tenga solución. Explica por qué no tiene solución.

Usa la hoja de cálculos para resolver problemas con dos variables

MATERIALES

computadora con
programa de hoja de
cálculos (1 por grupo.)

Jeans Universe tienen una gran venta de apertura.

Jeans Universe

¡Todos los pantalones a sólo \$24.95 el par!

¡Camisetas a sólo \$11.95 cada una!

**¡GRAN CELEBRACIÓN
DE APERTURA!**

Como parte de la gran celebración de apertura, Jeans Universe hizo una rifa. Lydia ganó un cupón de regalo de \$150, que quiere gastar en pantalones y camisetas. Cuando pensaba cuántos artículos de cada uno compraría, se hizo varias preguntas:

- ¿Cuántos pares de pantalones y camisetas debería comprar para gastar todo lo que pueda de mi cupón? ¿Y si quiero comprar al menos uno de cada uno?
- Si quiero comprar el mismo número de pantalones y camisetas, ¿cuántos puedo comprar de cada uno? ¿Y si quiero comprar dos camisetas por cada par de pantalones? ¿Dos pares de pantalones por cada camiseta?
- Mi madre dijo, —Realmente no creo que necesites más de 5 camisetas nuevas. ¿Cuántos pares de pantalones y camisetas puedo comprar sin pasarme del límite?



Prepara una hoja de cálculos

Lydia ha tenido problemas en resolver estas preguntas porque hay muchas posibles combinaciones. Ella preparó la siguiente hoja de cálculos para ayudarse a registrar las posibilidades.

Cuando Lydia complete su hoja de cálculos, mostrará los costos de varias combinaciones de pantalones y camisetas. Por ejemplo, la Celda F7 mostrará los costos de tres pares de pantalones y cuatro camisetas.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1					Pantalones	24.95			
2			0	1	2	3	4	5	6
3		0							
4		1							
5		2							
6		3							
7		4							
8	Camisetas	5							
9	11.95	6							
10		7							
11		8							
12		9							
13		10							
14		11							
15		12							

- Como ayuda para llenar la hoja de cálculos, Lydia decidió que necesitaba una ecuación que muestre cómo el costo total c depende del número de pares de pantalones j y el número de camisetas t que compre. ¿Qué ecuación debe usar?

Entonces Lydia introdujo las fórmulas en las Celdas C3–I3.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1					Pantalones	24.95			
2			0	1	2	3	4	5	6
3		0	=24.95*0+ 11.95*B3	=24.95*1+ 11.95*B3	=24.95*2+ 11.95*B3	=24.95*3+ 11.95*B3	=24.95*4+ 11.95*B3	=24.95*5+ 11.95*B3	=24.95*6+ 11.95*B3

- Explica qué hacen las fórmulas en las Celdas C3–I3.
- Prepara tu hoja de cálculos como la de Lydia. Usa el formato actual para los números en las Hileras 3–15 de las Columnas C–I. ¿Qué valores aparecen en las Celdas C3–I3?

Ahora selecciona las siete Celdas con fórmulas C3–I3, y usa el comando Fill Down para copiar las fórmulas a la Hilera 15. Ahora debes tener valores en todas las celdas de tu tabla.

4. Observa las fórmulas en las celdas de la Columna D.

- a.** ¿Qué partes de la fórmula cambian a medida que mueves la columna de una celda a la otra? ¿Qué partes de la fórmula se mantienen iguales?
- b.** ¿Qué hacen las fórmulas en la Columna D?

Usa la hoja de cálculos

Puedes usar los valores de tu hoja de cálculos para contestar las preguntas de Lydia.

- 5.** ¿Qué combinación de camisetas y pantalones le permitirá a Lydia gastar lo más que pueda de su cupón de \$150? ¿Cuánto gastaría?
- 6.** ¿Qué combinación de camisetas y pantalones le permitirá a Lydia gastar lo más que pueda de su cupón de \$150, si ella quiere comprar al menos un artículo de cada uno? ¿Cuánto gastaría?
- 7.** ¿Qué combinación debería comprar si quiere la misma cantidad de camisetas y pantalones? ¿Cuánto gastaría?
- 8.** ¿Qué combinación debería comprar si quiere el doble de camisetas que de pantalones? ¿Cuánto gastaría?
- 9.** ¿Qué combinación debería comprar si quiere el doble de pantalones que de camisetas? ¿Cuánto gastaría?
- 10.** Si quiere comprar un máximo de cinco camisetas, ¿qué combinación debería comprar? ¿Cuánto gastaría?



Inténtalo otra vez

¿Y si en lugar de pantalones y camisetas Lydia decide comprar dos artículos diferentes, como pantalones cortos y camisa cuello de tortuga o tenis y calcetines? En lugar de crear una hoja de cálculos para cada par de artículos, Lydia cambió su hoja de cálculos de manera que funcionara con cualquier par de precios.

Observa que, en la hoja de cálculos original, el valor en la Celda F1 es el costo de un par de pantalones y el valor en la Celda A9 es el costo de una camiseta. Lydia usó esta información para entrar nuevas fórmulas dentro de las Celdas C3–I3. Ella también cambió la etiqueta “Pantalones” por “Artículo 1” y la etiqueta “Camiseta” por “Artículo 2”.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1					Artículo 1	24.95			
2			0	1	2	3	4	5	6
3		0	=F\$1*0+\$A\$9*B3	=F\$1*1+\$A\$9*B3	=F\$1*2+\$A\$9*B3	=F\$1*3+\$A\$9*B3	=F\$1*4+\$A\$9*B3	=F\$1*5+\$A\$9*B3	=F\$1*6+\$A\$9*B3
4		1							
5		2							
6		3							
7		4							
8	Artículo 2	5							
9	11.95	6							
10		7							
11		8							
12		9							
13		10							
14		11							
15		12							

En vez de 24.95 y 11.95, las fórmulas nuevas usaron F\$1 y A\$9. El símbolo \$ le indica a la hoja de cálculos que use el valor como *constante*, en la celda indicada.

- F\$1 le indica a la hoja de cálculos que use el valor de la Celda F1, 24.95, como constante.
- A\$9 le indica a la hoja de cálculos que use el valor de la Celda A9, 11.95, como constante.

Cuando una fórmula con una constante se copia de una celda a otra, la hoja de cálculos no “actualiza” la constante para reflejar nuevas hileras o columnas.

Prepara tu hoja de cálculos de esta nueva manera.

- Introduce las nuevas fórmulas que se muestran en las Celdas C3–I3.
- Selecciona las Celdas C3–I3 y llena todas las columnas hasta la Hilera 15.



11. Observa cómo cambian las fórmulas al moverte hacia abajo en la Columna D.

a. ¿Qué partes de la fórmula cambian al moverte de celda a celda? ¿Qué partes de la fórmula permanecen iguales?

b. ¿Qué hacen las fórmulas en la Columna D?

Al simplemente cambiar los precios en las Celdas F1 y A9, ahora Lydia puede encontrar los precios fácilmente para combinaciones de 2 artículos cualesquiera.

Supón que los pantalones cortos cuestan \$19.95 y las camisas de cuello de tortuga cuestan \$13.95. Actualiza tu hoja de cálculos para mostrar las combinaciones de estos dos artículos.

- Escribe “Pantalones cortos” en la Celda E1 y “Camiseta de cuello de tortuga” en la Celda A8.
- Escribe el precio de los pantalones cortos, \$19.95, en la Celda F1 y el precio de la camiseta de cuello de tortuga \$13.95 en la Celda A8.

12. Kai ganó un cupón de regalo de \$75. Él quiere gastar lo más posible en pantalones cortos y camisas de cuello de tortuga. ¿Qué debe comprar? ¿Cuánto gastará?

13. Tamika quiere comprar sombreros y calcetines con su cupón de regalo de \$30. Los sombreros cuestan \$6.75; los calcetines son de \$2.95 el par. Altera tu hoja de cálculos para mostrar las combinaciones de los precios de los sombreros y calcetines.

¿Cuántos artículos de cada uno debe comprar Tamika para gastar lo más posible de su cupón de regalo? ¿Cuánto gastará?

14. Trabaja con un compañero para inventar un problema de una situación que presente una combinación de dos artículos con diferentes precios y escribe algunas preguntas sobre la situación. Usa tu hoja de cálculos para resolver tus preguntas.

¿Qué aprendiste?

15. Imagina que tienes un empleo de medio tiempo en una librería. Actualmente ganas \$6.25 por hora, pero esperas un aumento pronto. Diseña una hoja de cálculos que puedas usar para estar al tanto de las horas que trabajas y del dinero que ganas diariamente en una semana. Tu hoja de cálculos debe tener las siguientes características.

- Debe permitirte introducir el número de horas que trabajas cada día, de lunes a domingo.
- Debe calcular automáticamente los dólares que ganas diariamente, así como el total por semana.
- Debe usar una constante para tu salario por horas, de manera que puedas actualizarlo fácilmente cada vez que obtengas un aumento.



El salario mínimo federal por hora se estableció en 1938 en 25¢ por hora. Sesenta y cinco años después el salario mínimo se había elevado entre \$5 y \$5.15 por hora.

Ejercicios por tu cuenta

Practica & aplica

1. Hay seis maneras de relacionar estas cuatro ecuaciones.

i. $y = 2x + 4$

ii. $y + 2x = -4$

iii. $x = 4 - \frac{y}{2}$

iv. $2y - 4x = 10$

- Predice qué par de ecuaciones no tiene una solución común.
 - Verifica tu respuesta de la Parte a al graficar con cuidado ambas ecuaciones en cada par que seleccionaste. Explica cómo las gráficas verifican o no tu predicción.
 - Predice qué par, si hay alguno, tiene una solución común.
 - Verifica tu resultado de la Parte c al graficar ambas ecuaciones en cada par que seleccionaste. Explica cómo las gráficas verifican o no tu predicción.
 - Usa tus gráficas para encontrar una solución común a cada par de ecuaciones que enumeraste en la Parte c.
2. Cheryl y Felipe tienen cada uno algunas llaves en sus llaveros. Cheryl dice, —Tengo el doble de las que tú tienes. Felipe dice, —Si me dieras cuatro tendríamos el mismo número.



- Escribe dos ecuaciones que relacionen la cantidad de llaves que tiene cada uno.
 - ¿Cuántas llaves tiene Cheryl? ¿Cuántas tiene Felipe?
3. Un grupo de amigos entró a un restaurante. Ninguna mesa era lo suficientemente grande para sentar al grupo, de manera que los amigos acordaron sentarse en varias mesas separadas. Ellos querían sentarse en grupos de 5 pero no había suficientes mesas: 4 no tendrían lugar para sentarse. Alguien sugirió que se sentaran en grupos de 6 lo que llenará todas las mesas con 2 asientos extra en una mesa.

Responde estas preguntas para encontrar cuántas personas hay en el grupo y cuántas mesas están disponibles.

- Escribe un sistema de dos ecuaciones que describan la situación.
- Resuelve tu sistema de ecuaciones. ¿Cuántos amigos hay en el grupo y cuántas mesas están disponibles? Verifica tu trabajo.





Centro Rockefeller,
New York City

4. **Ciencia física** Un ciclista que conduce de Boston a la ciudad de New York mantiene una velocidad constante de 18 millas por hora. A la hora de haber comenzado el ciclista, un carro salió desde el mismo lugar viajando por el mismo camino a una velocidad promedio de 50 millas por hora.
 - a. Si el carro y la bicicleta viajan en la misma dirección, ¿a qué distancia estará cada uno de Boston en una hora y media después de que el ciclista salió del pueblo? ¿Quién estará a la cabeza?
 - b. Después de 2 horas, ¿quién estará a la cabeza?
 - c. En el mismo par de ejes, dibuja una gráfica de distancia-tiempo para el carro y la bicicleta. Coloca la distancia, desde Boston en millas, en el eje horizontal. Coloca el tiempo desde que el ciclista salió de Boston, en horas, en el eje vertical.
 - d. Usa tu gráfica para determinar la distancia aproximada, de Boston, a la que estaba el carro cuando sobrepasó a la bicicleta.
 - e. Aproximadamente, ¿cuánto tiempo había conducido el ciclista cuando el carro lo alcanzó?
 - f. Escribe una ecuación que relacione la distancia en millas de la bicicleta desde Boston con el tiempo en horas después de que salió el ciclista. Usa las mismas variables, escribe otra ecuación que relacione la distancia del carro de Boston con el tiempo después de que salió el ciclista.
 - g. Si buscaras el par de valores que se ajusta a tus ecuaciones, ¿qué representarían esos valores?
5. Resuelve uno de estos sistemas de ecuaciones al dibujar una gráfica. Resuelve el otro por sustitución.

a. $f + g = 20$ $3f + g = 28$	b. $y - x = 3$ $2y + 3x = 16$
--	--
6. La suma de dos números es 31. Uno de los números es 9 más que el otro.
 - a. Escribe un sistema de dos ecuaciones que relacione los números.
 - b. Resuelve el sistema para encontrar los números.
7. **Economía** Andre compró 11 libros en una venta de libros usados. Algunos costaron 25¢ cada uno, otros costaron 35¢ cada uno. Andre gastó \$3.15.
 - a. Escribe un sistema de dos ecuaciones que describa esta relación y resuélvelo con sustitución.
 - b. ¿Cuántos libros de cada precio compró Andre?

Usa eliminación para resolver los sistemas de ecuaciones en los Ejercicios 8 al 11, verifica tus soluciones. Proporciona la siguiente información:

- qué variable eliminaste
- si sumaste o restaste ecuaciones
- la solución

$$\begin{aligned} 8. \quad x + y &= 12 \\ x - y &= -6 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 9. \quad 3p + 2q &= 13 \\ 3p - 2q &= -5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 10. \quad 5a + 4b &= 59 \\ 5a - 2b &= 23 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 11. \quad 9s + 2t &= 3 \\ 4s + 2t &= 8 \end{aligned}$$

Resuelve por eliminación los sistemas de ecuaciones en los Ejercicios 12 al 15, verifica tus soluciones. Proporciona la siguiente información:

- qué ecuación o ecuaciones volviste a plantear
- cómo volviste a plantear cada ecuación
- si sumaste o restaste ecuaciones
- la solución

$$\begin{aligned} 12. \quad 3m + n &= 7 & [A] \\ m + 2n &= 9 & [B] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 13. \quad 6x + y &= -54 & [C] \\ 2x - 5y &= -50 & [D] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 14. \quad 2a + 5b &= 12 & [E] \\ 3a + 2b &= 7 & [F] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 15. \quad y &= \frac{3}{4}x - 4 & [G] \\ 4y &= 2x + 3 & [H] \end{aligned}$$

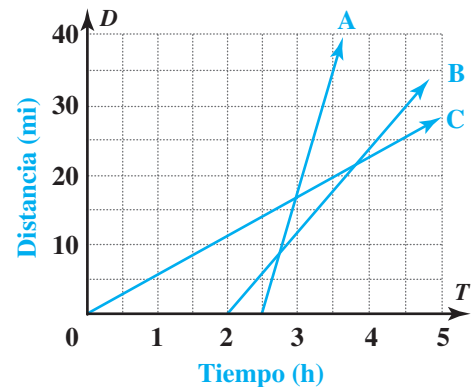
Conecta & amplía

- 16. Economía** El representante de un grupo rock quiere estimar, basado en experiencias anteriores, la cantidad de boletos para el próximo concierto que se venderán por adelantado y la cantidad de boletos que se venderán en la puerta, la misma noche del concierto.

En un concierto reciente, la sala con 1,000 asientos estaba llena. Los boletos que se vendieron por adelantado costaron \$30, los que se vendieron en la puerta costaron \$40 y el total de la venta de los boletos fue de \$38,000.

- Escribe un sistema de dos ecuaciones que represente esta información.
- En un par de ejes, dibuja las gráficas de las ecuaciones.
- Usa tus gráficas para estimar el número de ventas por adelantado y el número de ventas en la puerta que se hicieron esa noche.
- Verifica que tus estimaciones se ajusten a las condiciones y reemplázalas dentro de ambas ecuaciones.

- 17.** Tres turistas salieron de un hotel una mañana y se dirigieron en la misma dirección. Tyrone, el peatón, se levantó temprano y salió con un paso constante. Manuela, la ciclista, se quedó dormida y salió dos horas después. Kevin alcanzó el autobús media hora después de que salió Manuela. Estas tres gráficas muestran sus distancias a través del tiempo.



- Relaciona cada gráfica con el turista que representa.
 - ¿Cuándo y dónde Manuela sobrepasó a Tyrone? ¿Cuándo y dónde Kevin sobrepasó a Manuela? ¿Cuándo y dónde Kevin sobrepasó a Tyrone?
 - De las gráficas, estima la velocidad a la que viajó cada turista.
 - Escribe ecuaciones para las tres rectas.
 - ¿Qué sistema de ecuaciones resolverías para determinar cuándo y dónde Manuela sobrepasó a Tyrone? Verifica tu respuesta al resolver el sistema y comparar la solución con tu respuesta de la Parte b.
- 18.** Inventa una situación con dos variables que se puedan expresar en términos de dos ecuaciones lineales. Escribe y resuelve las ecuaciones para proporcionar la respuesta al problema.
- 19.** Dibuja una gráfica para resolver este sistema de ecuaciones cuadráticas.

$$y = x^2 \qquad y = 4 - 3x^2$$

- 20. Historia** Resuelve este problema que planteó Mahavira, un matemático hindú que vivió alrededor del año 850 A.D.

El precio combinado de 9 cidras y 7 feronias aromáticas es 107; de nuevo, el precio combinado de 7 cidras y 9 feronias aromáticas es 101. ¡Oh tú aritmético! Dime rápidamente el precio de una cidra y de una feronia, habiendo separado los precios claramente.

- 21.** Rachel y Cuong van a la feria. Rachel tiene \$13.50 para gastar y calcula que ella gastará todo su dinero si se sube a cuatro paseos y juega tres veces. Cuong tiene \$15.50 y calcula que gastará todo su dinero si se sube a dos paseos y juega cinco veces.
- Elige variables y escribe ecuaciones para escribir esta situación.
 - Usa sustitución para calcular el costo de subirse a un paseo y de jugar.

En tus propias palabras

Has usado tres métodos para resolver sistemas de ecuaciones en esta lección: graficar, reemplazar y eliminar. Explica cómo decides qué método de solución usar cuando resuelves un sistema particular de ecuaciones.

22. Economía Para el concierto de una escuela un negocio de imprenta pequeño cobra \$8 por imprimir 120 boletos y \$17 por imprimir 300 boletos. Ambos de estos costos totales incluyen un costo fijo y un costo unitario por boleto. Es decir, el costo por n boletos es $c = A + Bn$, donde A es el cargo fijo del negocio por cada pedido y B es el cargo por boleto.

- Con el hecho de que cuesta \$8 mandar a imprimir 120 boletos, escribe una ecuación en que A y B sean las únicas cantidades desconocidas.
- Para escribir una segunda ecuación, usa el costo de \$17 por 300 boletos.
- Usa el método de sustitución para determinar los cargos fijos y variables del negocio.

23. Evan y su hermano pequeño Keenan comparan sus colecciones de cedés. Prepara dos ecuaciones y resuélvelas por eliminación para determinar cuántos cedés tiene cada uno.



24. Economía Las familias Pérez y Searle fueron al cine. Los precios de admisión fueron \$9 para los adultos y \$5 para los niños, y fue un total de \$62 para las 10 personas que fueron.

- Escribe dos ecuaciones para representar esta situación.
- Resuelve tu sistema por eliminación para determinar cuántos adultos y cuántos niños fueron al cine.

25. Puedes usar un sistema de ecuaciones para determinar la ecuación de una recta cuando conoces 2 puntos sobre la recta. Este ejercicio te ayudará a determinar una ecuación que pasa a través de los puntos $(1, -2)$ y $(3, 4)$.

- La ecuación de una recta siempre se puede escribir en la forma $y = mx + b$. Reemplaza $(1, -2)$ en $y = mx + b$ para determinar una ecuación que use m y b .
- Reemplaza el punto $(3, 4)$ en $y = mx + b$ para determinar una segunda ecuación.
- Determina la solución común para las dos ecuaciones de las Partes a y b. Úsalas para escribir una ecuación para la recta.
- Usa la misma técnica para determinar una ecuación de la recta que pasa a través de los puntos $(-1, 5)$ y $(3, -3)$. Verifica tu respuesta al confirmar que ambos puntos satisfacen tu ecuación.

Repaso mixto

La intersección x es el valor de x en que la recta cruza el eje x . Determina una ecuación para la recta con la intersección x y la pendiente dadas.

26. La intersección x 5, pendiente -2

27. La intersección x -2.5 , pendiente 0.5

Para cada tabla menciona si la relación entre x y y podría ser lineal, cuadrática, o una variación inversa, escribe una ecuación para la relación.

28.

x	0.5	2	4	5	20
y	5	1.25	0.625	0.5	0.125

29.

x	0.5	2	4	5	20
y	-1.25	2.5	7.5	10	47.5

30.

x	1	2	3	4	5
y	0.25	1	2.25	4	6.25



Recuerda

La circunferencia de un círculo es $2\pi r$, donde r es el radio.



Recuerda

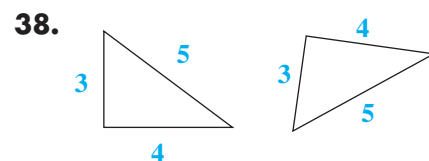
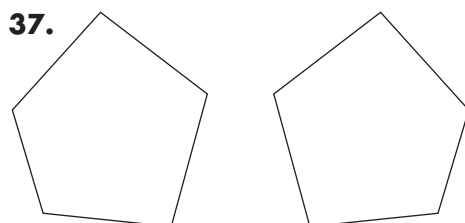
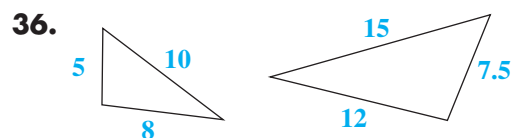
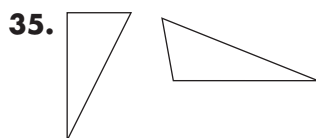
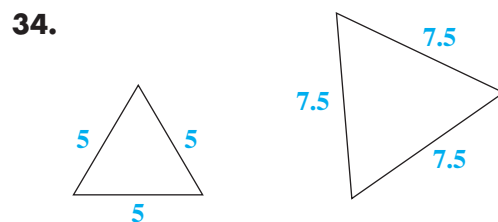
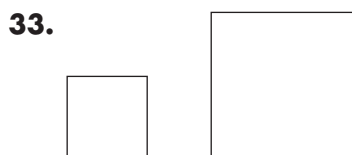
Las figuras congruentes deben ser exactamente de la misma forma y tamaño. En las figuras semejantes, los lados correspondientes tienen longitudes que comparten una razón común y los ángulos correspondientes son congruentes.

Geometría Determina el volumen de cada tanque cilíndrico.

31. un tanque con una altura de 9 m y una circunferencia de 19 m

32. un tanque con una circunferencia de 34 m y una altura igual al doble de su radio

Geometría Indica si las figuras de cada par son congruentes, semejantes, ambas o ninguna de las anteriores.



VOCABULARIO

desigualdad
eliminación
sistema de
ecuaciones
sustitución

MATERIALES

papel cuadriculado
calculadora
graficadora

Resumen del capítulo

Empezaste este capítulo repasando métodos para resolver ecuaciones como preparación para resolver desigualdades. La graficación se introdujo como una forma de entender desigualdades y para resolver ecuaciones. Aprendiste a usar la calculadora graficadora y las tablas para estimar soluciones de ecuaciones.

También descubriste que la *solución* de un sistema de ecuaciones es un grupo de valores que satisface todas las ecuaciones en el sistema. Encontraste soluciones de sistemas graficando y usando los métodos algebraicos de sustitución y eliminación.

Estrategias y aplicaciones

Las preguntas en esta sección te ayudarán a repasar y aplicar las ideas y estrategias importantes desarrolladas en este capítulo.

Usa métodos algebraicos para resolver ecuaciones

1. Explica cómo resolver una ecuación usando la vuelta atrás. Ilustra tu explicación con un ejemplo.
2. Explica cómo resolver una ecuación haciendo lo mismo en ambos lados. Ilustra tu explicación con un ejemplo.
3. La suma de tres números consecutivos es 57. Escribe y resuelve una ecuación para encontrar los tres números.

Entiende y resuelve desigualdades

4. Enumera todos los números enteros que hagan estas dos desigualdades verdaderas.

$$t < 8 \qquad 2 < t \leq 10$$

5. Escribe la siguiente desigualdad en palabras y proporciona todos los valores en números enteros para x que hagan verdadero el enunciado.

$$8 < x \leq 11$$

6. Una pequeña tienda de videos ha determinado que sus ganancias mensuales deben ser *al menos* \$1,300 a fin de mantenerse en el negocio. Las películas se rentan a \$2 cada una. Los gastos del negocio, incluyendo la renta, son de \$800 por mes.

Usa la fórmula $\text{ventas totales} - \text{gastos} = \text{ganancia}$ para escribir y resolver una desigualdad que muestre cuántas películas, m , deben rentarse mensualmente para que la tienda siga en el negocio.



7. Un salón de banquetes hace cenas para grupos grandes. El costo de la renta del salón por una noche es de \$1,500 más \$40 por persona.

Escribe y resuelve una desigualdad que responda esta pregunta: *Rod y Masako piensan festejar la recepción de su boda en este salón de banquetes. ¿Cuántas personas pueden invitar si su presupuesto total para la renta del salón es de \$7,500?*

Grafica desigualdades

8. Considera estos dos enunciados.

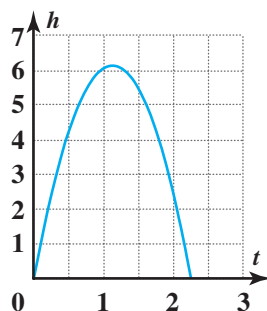
$$x > 3 \text{ ó } x < 5$$

$$x > 3 \text{ y } x < 5$$

- a. ¿El grupo de valores que satisface “ $x > 3$ ó $x < 5$ ” incluye 3 y 5? Dibuja una gráfica recta numérica para ilustrar tu respuesta.
- b. ¿El grupo de valores que satisface “ $x > 3$ y $x < 5$ ” incluye 3 y 5? Usa una gráfica recta numérica para ilustrar tu respuesta.
9. Explica los pasos que implican graficar una desigualdad con dos variables. Da un ejemplo para ilustrar tus pasos.

Usa gráficas para estimar soluciones de ecuaciones

- 10.** Explica cómo puedes usar las opciones Trace y Zoom de tu calculadora como ayuda para estimar ecuaciones.
- 11.** Usa esta gráfica para estimar la altura de un cuerpo a través del tiempo, a la décima más cercana, el tiempo en que $h = 5$.



- 12.** Dibuja una gráfica de $y = 4x - 0.5x^2$. Calcula un valor de c para el que $4x - 0.5x^2 = c$ tenga sólo una solución.

Usa tablas para estimar las soluciones de ecuaciones

- 13.** Esta tabla de valores es para la ecuación $y = x^2 + x$. ¿Entre cuáles dos valores de x esperarías encontrar una solución para $x^2 + x = \frac{11}{4}$?

x	y
1	2
1.1	2.31
1.2	2.64
1.3	2.99
1.4	3.36
1.5	3.75
1.6	4.16

- 14.** La ecuación $0.5x^2 - x - 1 = 3 - x^2$ tiene dos soluciones. En esta tabla, $y_1 = 0.5x^2 - x - 1$ y $y_2 = 3 - x^2$. ¿Qué información te da esta tabla sobre las soluciones?

x	y_1	y_2
-3	6.5	-6
-2	3	-1
-1	0.5	2
0	-1	3
1	-1.5	2
2	-1	-1
3	0.5	-6

Resuelve sistemas de ecuaciones gráfica y algebraicamente

- 15.** Usa una gráfica para encontrar soluciones de este sistema de ecuaciones. Si es necesario, vuelve a escribir las ecuaciones antes de graficarlas.

$$y - 1 = -x \qquad y - x^2 = -1$$

- 16.** Dos tiendas de materiales de construcción competidoras tienen diferentes precios de bloques de concreto. La Tienda A cobra \$0.75 por bloque y \$15 por entrega. La Tienda B cobra \$1.05 por bloque pero la entrega es gratis.
- a.** Para cada tienda de materiales de construcción, escribe una ecuación que represente el costo total por bloques, C , relacionado con el número de bloques comprados, b . Después grafica ambas ecuaciones en el mismo grupo de ejes.
- b.** ¿Bajo qué circunstancias ordenarías bloques de concreto de la Tienda A? ¿De la B? ¿Hay circunstancias en las que no haya diferencia sobre en cuál tienda comprar?

- 17.** Resuelve este sistema de ecuaciones usando la sustitución o la eliminación. Di qué método usas y explica por qué lo elegiste.

$$2x - 2y = 5 \qquad y = -x - 3$$

Demuestra tus destrezas

- 18.** Resuelve esta ecuación usando el método de la vuelta atrás. Verifica tu solución.

$$\frac{1}{3}\left(3 + \frac{x}{2}\right) - 1 = 4$$

- 19.** Resuelve esta ecuación haciendo lo mismo en ambos lados. Verifica tu solución.

$$1 - 2p = 2 + 2p$$



Resuelve cada desigualdad.

20. $3(j + 1) - 2(2 - j) \leq 9$

21. $6(k - 5) - 2 \leq 10$

22. $-2(b + 1) > -5$

23. En una recta numérica, grafica todos los valores x para los que $x \leq -1$ ó $x > 2$.

24. Grafica la solución de esta desigualdad en una recta numérica.

$$\frac{t}{2} + 2 > 3$$

Grafica cada desigualdad.

25. $y \geq x - 2$

26. $y < -2x + 1$

27. Usa una calculadora y una tabla de valores, en la forma de intervalo desde -3 a 7 para estimar las dos soluciones de esta ecuación a la centésima más cercana.

$$0.5x(0.5x - 2) = 2$$

28. Usa una tabla de valores para resolver esta ecuación a la centésima más cercana. Si hay más de una solución, encuéntralas y verifica ambas.

$$2x^2 - x = 2x + 1$$

29. Usa la sustitución para resolver este sistema de ecuaciones. Verifica tu solución.

$$\begin{aligned}x &= y + 8 \\ 3y + 1 &= 2x\end{aligned}$$

30. Usa la eliminación para resolver este sistema de ecuaciones. Verifica tu solución.

$$\begin{aligned}4x - 10y &= 2 \\ 3x + 5y &= 9\end{aligned}$$

Resuelve cada sistema de ecuaciones. Verifica tus soluciones.

31. $\begin{aligned}-x + 1 &= y \\ y - x &= 2\end{aligned}$

32. $\begin{aligned}3x &= 3y + 1 \\ x &= 1 - y\end{aligned}$

33. $\begin{aligned}3.5y - 1.5x &= 6 \\ -3y + x &= 3\end{aligned}$